

ANALISIS DE SISTEMAS DINAMICOS DE UN  
GRADO DE LIBERTAD QUE INCLUYEN ROZAMIENTO

Preparado por: Patricio F. Mendez

Dirigido por: Dr. Ricardo A. Bastianon

JUNIO 1989

## INDICE

### NOMENCLATURA

1. INTRODUCCION
2. ANALISIS DEL SISTEMA DINAMICO
3. SISTEMA SIN ROZAMIENTO
  - 3.1. Comportamiento libre
    - 3.1.1 Régimen subamortiguado
    - 3.1.2 Régimen crítico
    - 3.1.3 Régimen sobreamortiguado
  - 3.2 Comportamiento forzado
4. SISTEMA CON ROZAMIENTO
5. ADIMENSIONALIZACION DE LA ECUACION QUE REPRESENTA A UN SISTEMA DINAMICO CON ROZAMIENTO.
6. METODO NUMERICO PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS DINAMICOS DE UN GRADO DE LIBERTAD QUE INCLUYEN ROZAMIENTO.
  - 6.1 Análisis de la estabilidad del esquema numérico
  - 6.2 Estudio de la estabilidad del programa DINAL
7. PROGRAMA DINAL
  - 7.1 Programa READDIN
  - 7.2 Programa DRAAR
8. RESULTADOS OBTENIDOS
  - 8.1 Comportamiento libre sin rozamiento
    - 8.1.1 Régimen subamortiguado
    - 8.1.2 Régimen crítico
    - 8.1.3 Régimen sobreamortiguado
  - 8.2 Comportamiento forzado sin rozamiento
    - 8.2.1. Régimen subamortiguado
    - 8.2.2 Régimen crítico
    - 8.2.3 Régimen sobreamortiguado
  - 8.3 Comportamiento libre con rozamiento
  - 8.4 Comportamiento forzado con rozamiento
  - 8.5 Comportamiento libre mixto
  - 8.6 Comportamiento forzado mixto

### 9. CONCLUSIONES

### BIBLIOGRAFIA

## NOMENCLATURA

- $I$  : Momento de inercia en el eje de giro  
 $k$  : Constante del resorte  
 $C$  : Constante del amortiguador viscoso  
 $R_d$  : Momento del rozamiento dinámico  
 $R_e$  : Momento del rozamiento estático  
 $M(t)$  : Momento de excitación  
 $\theta$  : Giro alrededor del eje  
 $\theta^*$  : Giro alrededor del eje adimensionalizado  
 $\theta^{**}$  : Giro alrededor del eje adimensionalizado, y que depende de  $t^*$   
 $t$  : Tiempo  
 $t^*$  : Tiempo adimensionalizado  
 $\xi$  : Coeficiente de fricción viscosa  
 $\zeta$  : Coeficiente de fricción seca  
 $\omega_0$  : Pulsación natural del sistema  
 $T_0$  : Período natural del sistema  
 $M_c$  : Momento característico  
 $\Phi$  : Factor de magnificación  
 $\alpha$  : Angulo de fase  
 $h$  : paso temporal del esquema numérico

## 1. INTRODUCCION

En esta etapa de la investigación se lleva a cabo un análisis de los sistemas dinámicos de un grado de libertad que incluyen fricción seca.

Para ello se realizó el programa DINAL, de diferencias finitas, del que se hace un estudio detallado de su estabilidad.

Finalmente, se grafican los resultados obtenidos con el programa DINAL, para sistemas lineales y no lineales, libres y excitados.

El programa DINAL se basa en las ecuaciones del método de RUNGE KUTTA de cuarto orden. Se descartó un análisis por medio de la transformada de LAPLACE, debido a que deja de ser útil cuando la ecuación diferencial es no lineal.

El objetivo del estudio de este tipo de sistemas dinámicos es relacionarlos con los otros sistemas dinámicos, de manera de formar un lazo cerrado de control como el que gobierna una turbina eólica. El segundo sistema dinámico está constituido por el eje de la turbina y el generador, mientras que el primero es el regulador centífugo.

Se incluye en el modelo del sistema dinámico la acción de fuerzas de fricción seca, pues son este tipo de fuerzas las que deben ser vencidas por el regulador al ejercer su acción de control. Estas fuerzas no solo no son despreciables sino que su valor es de una magnitud comparable a las de las demás fuerzas.

## 2. ANALISIS DEL SISTEMA DINAMICO

Los sistemas que se estudiarán estén constituidos por una masa giratoria equilibrada, una barra de torsión o resorte, un amortiguador viscoso y sufren fricción de Coulomb (Fricción seca).

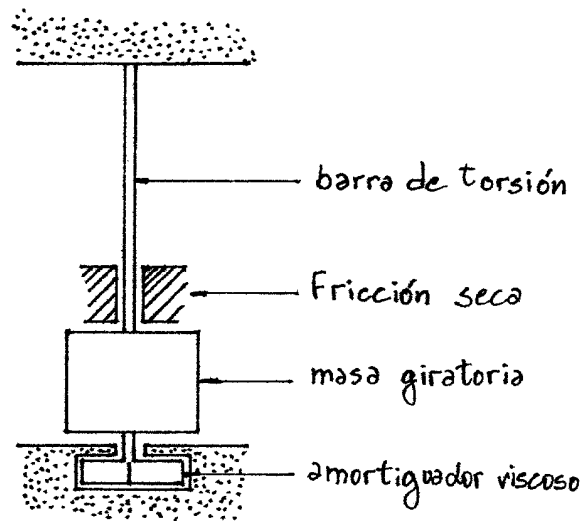


FIGURA 1

Estos sistemas pueden evolucionar libremente, o ser excitados externamente.

El diagrama de cuerpo libre de la masa será:

$M(t)$  : es el momento de excitación.

$k.\theta$  : es el momento que el resorte ejerce sobre la masa.

$C.\dot{\theta}$  : es el momento que el amortiguador viscoso ejerce sobre la masa.

$R_s.s\dot{\theta}$  : es el momento que la fricción seca ejerce sobre la masa.

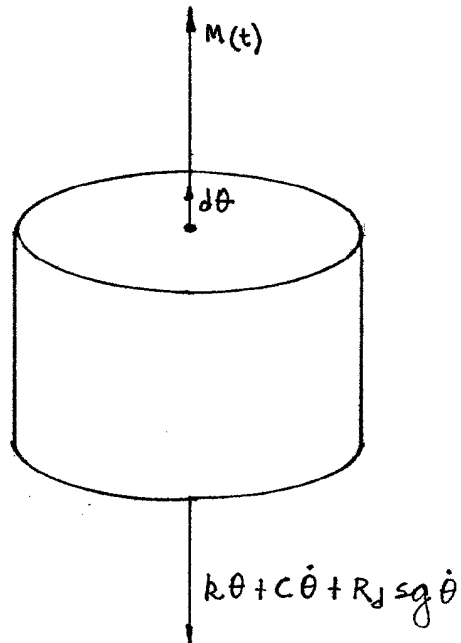


FIGURA 2

Si  $I$  es el momento de inercia de la masa, la ecuación de la dinámica será:

$$M - k\theta - c\dot{\theta} - R_d \operatorname{sg} \dot{\theta} = I\ddot{\theta}$$

reordenando:

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + R_d \operatorname{sg} \dot{\theta} + k\theta = M \quad (1)$$

En la ecuación anterior se consideró al momento debido a la Fricción seca como  $R_d \operatorname{sg} \dot{\theta}$ , pero cuando  $\dot{\theta} = 0$ , este momento vale  $R_e \operatorname{sg} \dot{\theta}$  y si  $R_e$  es mayor que el momento resultante de los demás momentos actuantes, el sistema quedará detenido hasta que esta situación se revierta. Por lo tanto, la ecuación que expresará más correctamente el

comportamiento del sistema será

$$\begin{cases} I \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + R_d \operatorname{sg} \dot{\theta} + k \theta = M & (\dot{\theta} \neq 0 \vee |M - k\theta| > R_e) \\ \ddot{\theta} = 0 & (\dot{\theta} = 0 \wedge |M - k\theta| \leq R_e) \end{cases}$$

Se define la pulsación natural del sistema  $\omega_0$ , el coeficiente de fricción viscosa  $\zeta$  como:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

$$\zeta = \frac{C}{2 I \omega_0}$$

Reemplazando las magnitudes recién definidas en la ecuación y operando, se obtiene:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta \omega_0 \dot{\theta} + \frac{R_d}{I} \operatorname{sg} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = M(t) \quad (2)$$

Si se define  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , en oscilaciones libres no amortiguadas  $T_0$  representa su período.

### 3. SISTEMA SIN ROZAMIENTO

#### 3.1 Comportamiento Libre

Si no existe fricción seca, la solución de la ecuación es muy simple, y en el caso de un sistema no excitado, se dan tres casos posibles, régimen subamortiguado, crítico y sobreamortiguado.

La ecuación (2) queda:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (3)$$

Las condiciones iniciales son:

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

#### 3.1.1 Régimen subamortiguado:

El régimen subamortiguado se presenta cuando  $\zeta < 1$ , y la solución de la (3) es:

$$\theta(t) = e^{-\omega_0\zeta t} \left[ \theta_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} \cos(\omega_1 t - \varphi) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right]$$

donde:

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



Se observa que las oscilaciones no responden a una pulsación  $\omega_0$  sino a otra pulsación diferente  $\omega_1$ . Esto permite definir

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

que es llamado "pseudoperíodo"

### 3.1.2 Régimen crítico:

El régimen crítico se presenta cuando  $\xi=1$ , y la expresión que rige su comportamiento es:

$$\theta(t) = \theta_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} + \dot{\theta}_0 t e^{-\omega_0 t}$$

En este régimen no existe oscilaciones.

### 3.1.3 Régimen sobreamortiguado:

El régimen sobreamortiguado se presenta cuando  $\xi > 1$ , en este caso tampoco existen oscilaciones.

$$\theta(t) = \theta_0 \frac{r_2 e^{-r_1 \omega_0 t} - r_1 e^{-r_2 \omega_0 t}}{r_2 - r_1} + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \frac{e^{-r_1 \omega_0 t} - e^{-r_2 \omega_0 t}}{r_2 - r_1}$$

donde:  $\Gamma_1 = \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$\Gamma_2 = \zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1}$$

### 3.2 Comportamiento forzado:

En el caso de sistemas excitados la solución analítica es simple solo en algunos casos particulares, y es preferible el análisis por métodos numéricos.

Si se considera una excitación armónica  $M = M_c \text{ sen } \omega t$ , la respuesta en régimen permanente será :

$$\theta = \frac{M_c}{k} \Phi \text{ sen } (\omega t - \alpha)$$

donde

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\alpha = \text{arctg} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$\Phi$  es llamado factor de magnificación del régimen permanente. En la Figura 3 se grafica  $\Phi$  en función de la relación  $\frac{\omega}{\omega_0}$  para distintos valores de  $\zeta$ . Si se compara la curva correspondiente a  $\zeta = 0$  con las demás se comprueba que el amortiguamiento produce una gran reducción de  $\Phi$  para valores de  $\frac{\omega}{\omega_0}$  cercanos a 1, que es la condición de resonancia.

En cambio, para relaciones  $\frac{\omega}{\omega_0}$  lejanas a 1, puede suponerse  $\xi = 0$  sin cometer un error importante.

Para  $\frac{\omega}{\omega_0} > 6,4$  y  $\frac{\omega}{\omega_0} < 0,156$  el error al considerar  $\xi = 0$  cuando en realidad  $\xi = 1$  es menor al 5%.

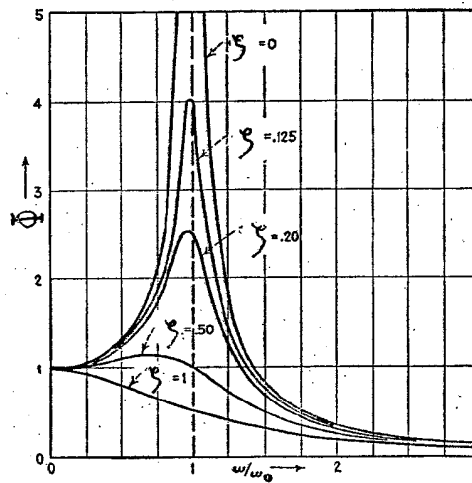


FIGURA 3

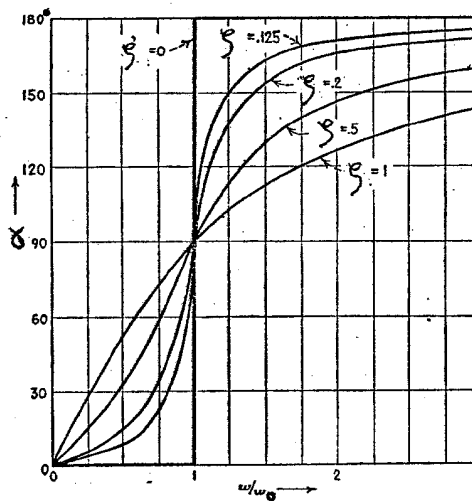


FIGURA 3 bis

$\alpha$  es llamado ángulo de fase, y representa el atraso del sistema en responder a la excitación. En la Figura 3 bis se grafica  $\alpha$  en función de la relación  $\frac{\omega}{\omega_0}$  para distintos valores de  $\zeta$ .

#### 4. SISTEMA CON ROZAMIENTO

##### 4.1 Comportamiento Libre

Si existe Fricción seca, la solución de la ecuación (2) es muy complicada pues es una ecuación no lineal, pero si se considera que no hay amortiguamiento viscoso y el sistema no es excitado es posible obtener algunas conclusiones.

La ecuación<sup>(2)</sup> queda:

$$\ddot{\theta} + \frac{R_d}{I} \operatorname{sgn} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (4)$$

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

A partir de  $t=0$ ,  $\dot{\theta}$  será negativo, y antes de que cambie de signo, el sistema se comportará como un sistema lineal excitado que responde a la siguiente ecuación:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{R_d}{I}$$

La solución de esta ecuación, válida sólo entre  $t=0$ , y el momento en que  $\dot{\theta}$  cambia de signo, es:

$$\theta = \left( \theta_0 - \frac{R_d}{k} \right) \cos \omega_0 t + \frac{R_d}{k}$$

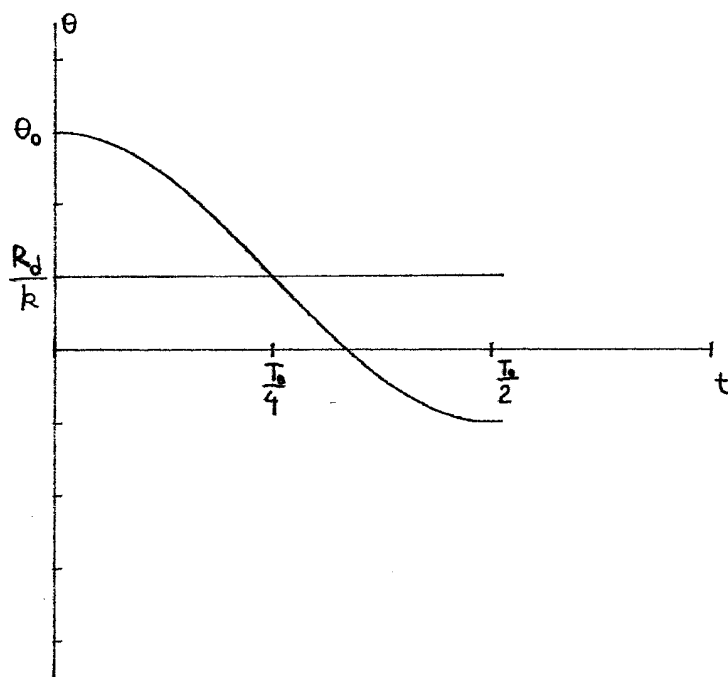


FIGURA 4

De aquí se deduce que la presencia de rozamiento de Coulomb no altera la frecuencia natural del sistema como sucedía en el amortiguador viscoso, y que en cada semiperíodo la amplitud de las oscilaciones disminuye  $2 \frac{R_d}{k}$ .

El momento de rozamiento estático es  $R_e$ , generalmente mayor que  $R_d$ . El sistema se detendrá definitivamente cuando la fuerza del resorte, en un momento en que  $\dot{\theta} = 0$ , no sea capaz de vencer a  $R_e$ .

Esto significa que el sistema puede detenerse definitivamente en una posición distinta de cero.

El máximo apartamiento final posible es cuando:

$$|k\theta| = R_e$$

$$|\theta| = \frac{R_e}{k}$$

Si se adimensionaliza haciendo

$$\theta = \theta^* \frac{M_c}{k}$$

$$R_e = \zeta |M_c|$$

Donde  $M_c$  es un momento arbitrario llamado momento característico, y  $\zeta$  es el coeficiente de fricción seca.

Así se obtiene que el máximo apartamiento posible es:

$$|\theta^*| = \zeta$$

Si además de rozamiento seco, existe amortiguación viscosa, de manera similar a la anterior, es posible demostrar que la fricción seca no alterará el pseudo período  $T_1$ .

#### 4.2 Comportamiento Forzado

Existiendo un momento de excitación la resolución analítica del sistema se torna muy complicada y es preferible para estudiar su comportamiento el empleo de métodos numéricos.

Si el rozamiento es pequeño es posible linealizar la ecuación cuando la fuerza de excitación es armónica.

Si no hay amortiguación viscosa, la ecuación es:

$$\ddot{\theta} + \zeta \frac{M_c}{I} \operatorname{sgn} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{M_c}{I} \operatorname{sen} \omega t$$

donde  $\zeta = \frac{R_d}{M_c}$  es el coeficiente de fricción seca.

Como el rozamiento es pequeño, la curva resultante será muy aproximada a una senoide.

En general se linealiza este rozamiento tomando un amortiguador viscoso que disipe la misma cantidad de energía por ciclo.

Dado que se aproxima la curva real a una senoide.

$$\theta = \theta_{\max} \sin \omega t$$

$$\dot{\theta} = \theta_{\max} \omega \cos \omega t$$

El trabajo disipado por un amortiguador viscoso en un ciclo es

$$\pi C \omega \theta_{\max}^2$$

El disipado por la fuerza de fricción es

$$\oint R_d \operatorname{sgn} \dot{\theta} d\theta = \int_0^T R_d |\dot{\theta}| dt = \theta_{\max} \int_0^{2\pi} R_d |\cos \omega t| d(\omega t)$$

la integral es:

$$4 R_d \int_0^{\pi/2} \cos(\omega t) d(\omega t) = 4 R_d$$

Iguando:

$$C = \frac{4 R_d}{\pi \omega \theta_{\max}}$$

Si

$$C = 2 I \omega_0 \zeta$$

$$R_d = |M_c| \zeta$$

La relación entre los factores de amortiguamiento es

$$\zeta = \frac{1}{\theta_{\max}^* \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0}} \}$$

donde

$$\theta_{\max}^* = \theta_{\max} \cdot k / M_c$$

Sustituyendo este valor de  $C$ , se puede obtener el factor de magnificación para este <sup>lineal</sup>linealizado.

$$\Phi = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{2}\right)^2}}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

Así se obtienen las curvas de la Figura 5a

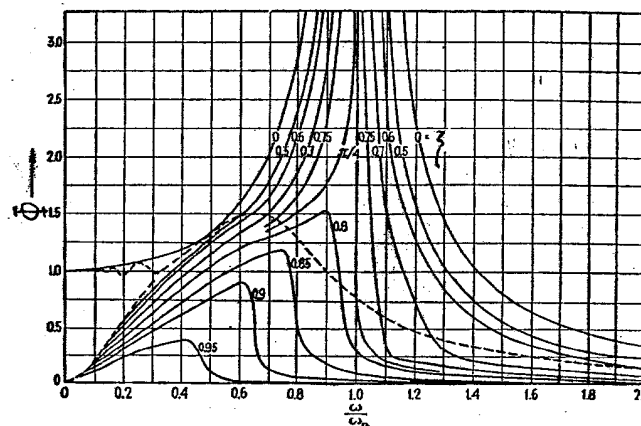


FIGURA 5a



En estas curvas se ve que si  $\zeta < \frac{\pi}{4}$ , para la frecuencia de resonancia,  $\Phi$  es infinito, a pesar de haber amortiguamiento.

Debajo de la linea punteada de la Figura 5a, el sistema se detiene una vez en cada medio ciclo. En la región del ángulo izquierdo inferior, el sistema se detiene más de una vez por semiciclo.

En ninguno de los casos es válida la aproximación anteriormente descripta.

La respuesta aproximadamente sinusoidal del sistema, estará desfasada de la excitación un ángulo  $\alpha$ , que se grafica en la Figura 5b.

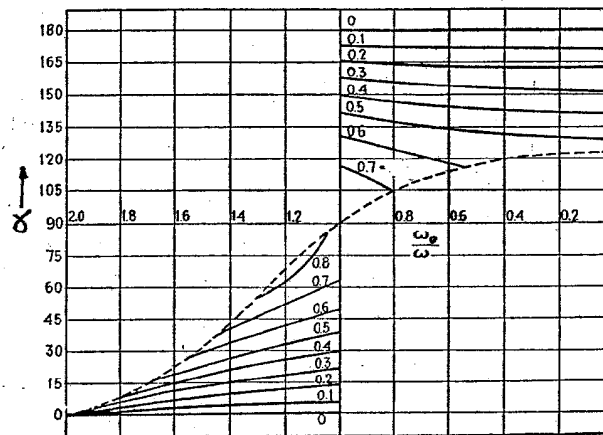


FIGURA 5 b

5. ADIMENSIONALIZACION DE LA ECUACION  
QUE REPRESENTA UN SISTEMA DINAMICO  
CON ROZAMIENTO.-

La ecuación que representa a este sistema es:

$$\begin{cases} I \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + R_d \operatorname{sgn} \dot{\theta} + k \theta = M(t) & (\dot{\theta} \neq 0 \vee |M - k\theta| > R_c) \\ \ddot{\theta} = 0 & (\dot{\theta} = 0 \wedge |M - k\theta| \leq R_c) \end{cases} \quad (6)$$

Para adimensionalizar se hará:

$$t = t^* \cdot T_0$$

$$\text{donde: } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

$$\theta(t) = \frac{M_c}{k} \theta^*(t) = \frac{M_c}{k} \theta^{**}(t^*)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{M_c}{k T_0} \frac{d\theta^{**}(t^*)}{dt^*} = \frac{M_c}{k T_0} \dot{\theta}^{**}(t^*)$$

$M_c$  es un momento arbitrario, que en el caso de sistemas excitados permite adimensionalizar el momento de excitación:

$$M(t) = M_c \cdot M^*(t)$$

Y en el caso de los sistemas que evolucionan libremente representa la energía del sistema.

La energía inicial del sistema es:

$$E_0 = \frac{1}{2} k \theta_0^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}_0^2$$

Si se la considerase como debida solo a la posición inicial sería:

$$E_0 = \frac{1}{2} k \theta_1^2$$

Entonces:

$$\theta_1 = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{I}{k} \dot{\theta}_0^2} = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2}$$

El momento característico  $M_c$ , será el debido a esta posición inicial ficticia.

$$M_c = k \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2}$$

Analogamente:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{M_c}{k T_0^2} \ddot{\theta}^{**}$$

Si el sistema es excitado:

$$M(t) = M_c M^*(t) = M_c M^{**}(t^*)$$

Reemplazando las anteriores expresiones en la (6) y llamando por comodidad:

$$\theta^{**}(t^*) = u(t)$$

$$\dot{\theta}^{**}(t^*) = u'(t)$$

$$\ddot{\theta}^{**}(t^*) = u''(t)$$

$$M^{**}(t^*) = m(t)$$

$$I \frac{M_c}{k T_0^2} u'' + c \frac{M_c}{k T_0} u' + R_d \operatorname{sg}\left(\frac{M_c}{k T_0} u'\right) + k \frac{M_c}{k} u = M_c M^*$$

Teniendo en cuenta que  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$   $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$   $\gamma = \frac{c}{2I\omega_0}$   $\zeta = \frac{R}{|M_c|}$   
 queda:

$$u'' + 4\pi\gamma u' + 4\pi^2 \zeta \operatorname{sg} u' + 4\pi^2 u = 4\pi^2 m(t)$$

Llamando:

$$a = 4\pi\gamma$$

$$b = 4\pi^2 \zeta$$

$$c = 4\pi^2$$

$$F(t) = 4\pi^2 m(t)$$

Obtenemos:

$$u'' + a u' + b \operatorname{sg} u' + c u = f$$

Las características del sistema dinámico estarán dados solo por  $a$  y  $b$ .

La pulsación natural de este sistema será siempre  $\omega_0 = 2\pi$ , su período:  $T_0 = 1$ .

En resumen:

Las rotaciones se adimensionalizan haciendo:

$$\theta^* = \frac{\theta}{M_c/k}$$

Los tiempos se adimensionalizan haciendo:

$$t^* = \frac{t}{T_0}$$

Los momentos se adimensionalizan haciendo:

$$M^* = \frac{M}{M_c}$$

6. METODO NUMERICO PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS  
DINAMICOS DE UN GRADO DE LIBERTAD QUE INCLUYEN  
ROZAMIENTO.-

El sistema que se analizará responde a la ecuación diferencial

$$\begin{cases} I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + R \operatorname{sg} \dot{\theta} + k\theta = M(t) & (\dot{\theta} \neq 0 \vee |M - k\theta| > R_c) \\ \ddot{\theta} = 0 & (\dot{\theta} = 0) \end{cases}$$

Debido a la presencia de la fricción de Coulomb, aparece el término no lineal  $R \operatorname{sg} \dot{\theta}$ .

La existencia de este término hace que se tornen inadecuados para el análisis métodos analíticos, como podría ser el uso de la transformada de Laplace, por lo tanto el análisis se efectuará por medio de un método numérico.

El método numérico elegido es el de Runge Kutta de orden 4, por ser muy popular a causa de su gran estabilidad y precisión.

Este método para ecuaciones de primer orden del tipo

$$u' = f(u, t) \quad (8)$$

Puede escribirse como:

$$q_1 = h \cdot f(u_n, t_n)$$

$$q_2 = h \cdot f(u_n + \frac{q_1}{2}, t_{n+\frac{1}{2}})$$

$$q_3 = h \cdot f(u_n + \frac{q_2}{2}, t_{n+\frac{1}{2}})$$

$$q_4 = h \cdot f(u_n + q_3, t_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{q_1 + 2 \cdot q_2 + 2 \cdot q_3 + q_4}{6}$$

Dado que el sistema dinámico en estudio responde a una ecuación de segundo orden, habrá que hacer un cambio de variables para reducir la ecuación a una de primer orden.

A los fines de analizar el método numérico supondremos que la ecuación diferencial a resolver es

$$u'' + au' + b \operatorname{sg} u' + cu = f(t)$$

donde  $a, b, c$  son las constantes que definen el sistema, y  $f(t)$  es la función que representa la excitación.

El cambio de variables es:

$$u' = v$$

Y así se obtiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer grado, que puede ser resuelto por el método de Runge Kutta.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}_{U'} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -\frac{b}{|v|} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{-B} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_U + \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}}_F$$

$$AU' + BU = F$$

La matriz  $A$  es siempre invertible, y la matriz  $B$  depende del valor de  $v$ .

Llevando la ecuación anterior a la forma de la (8):

$$U' = \underbrace{A^{-1}(F - BU)}_G$$

El método de Runge Kutta será:

$$Q_1 = h G(U_n, t_n)$$

$$Q_2 = h G(U_n + \frac{Q_1}{2}, t_{n+\frac{1}{2}})$$

$$Q_3 = h G(U_n + \frac{Q_2}{2}, t_{n+\frac{1}{2}})$$

$$Q_4 = h G(U_n + Q_3, t_{n+1})$$

$$U_{n+1} = U_n + (Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 + Q_4)/6$$

Donde:

$$G = \left\{ \begin{matrix} v \\ f - cu - b \sin v - a v \end{matrix} \right\}$$

$$Q_i = \left\{ \begin{matrix} q_{1,i} \\ q_{2,i} \end{matrix} \right\}$$

Con estas ecuaciones se llevó a cabo el programa DINAL que resuelve la ecuación (7).

En esta ecuación se presenta el problema de que el sistema tiene comportamientos diferentes cuando está en movimiento y cuando está detenido.

Por diferencias finitas es muy improbable que el valor que representa a  $\dot{\theta}$  sea exactamente cero, lo que significa que habrá que tomar un criterio para determinar cuando el sistema esté detenido.



Este criterio será considerar  $\dot{\theta} = 0$  cuando  $\dot{\theta}$  pertenezca a un determinado entorno.

Si se supone a la función suficientemente lisa, tres puntos estarán aproximadamente sobre una recta. (Figura 6).

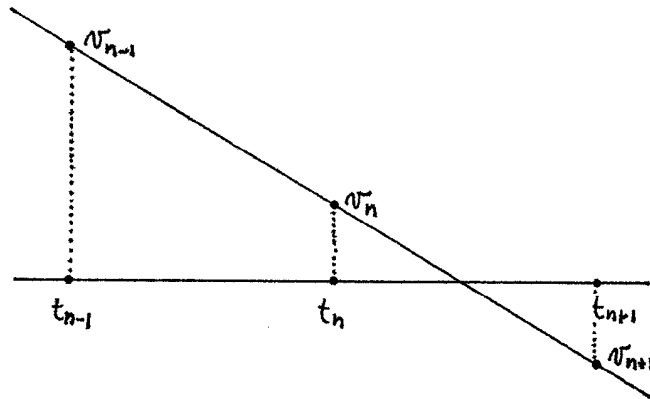


FIGURA 6

La variable que representa a  $\dot{\theta}$  es  $v$ , y se considerará como  $v = 0$  al punto que sea más cercano al eje.

La duda es cuál es más cercano, si  $v_n$  o  $v_{n+1}$ . Si los puntos están aproximadamente sobre una recta, habrá que considerar como cero a  $v_n$  cuando:

$$|v_n| < \frac{|v_{n-1} - v_n|}{2}$$

### 6.1 Análisis de la estabilidad del esquema numérico.-

La ecuación a resolver es:

$$U' = \underbrace{A^{-1}(F - BU)}_G$$

o sea:

$$U' = G$$

El método de Runge Kutta propone:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 + Q_4}{6}$$

$$Q = hG = \underbrace{hA^{-1}F}_M + \underbrace{(-hA^{-1}B)U}_N$$

entonces:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{N_1 + 2N_2 + 2N_3 + N_4}{6} \cdot U_n + \frac{M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4}{6}$$

$$U_{n+1} = \left[ I + (N_1 + 2N_2 + 2N_3 + N_4)/6 \right] U_n + \frac{M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4}{6}$$

$S$  es el operador en diferencias que relaciona  $U_{n+1}$  con  $U_n$ .  
También es la matriz de amplificación.

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

Para calcular los elementos de  $S$  :

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & \frac{b}{|w|} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ c & \frac{b}{|w|} + a \end{bmatrix}$$

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & h \\ -hc & -h\frac{b}{|w|} - ha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11}^i & n_{12}^i \\ n_{21}^i & n_{22}^i \end{bmatrix}$$

$$n_{11}^i = 0$$

$$n_{12}^i = h$$

$$n_{21}^i = -hc$$

$$n_{22}^i = -h\frac{b}{|w|} - ha$$

$$s_{11} = 1$$

$$s_{12} = h$$

$$s_{21} = -hc$$

$$s_{22} = 1 - ha - \frac{hb}{6} \underbrace{\left( \frac{1}{|w_n|} + \frac{2}{|w_n + \frac{q_{21}}{2}|} + \frac{2}{|w_n + \frac{q_{22}}{2}|} + \frac{1}{|\frac{q_{23}}{2}|} \right)}_{6K}$$

Si  $|r| \leq c$  entonces  $K \geq \frac{1}{c}$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -hc & 1 - h(a + kb) \end{bmatrix}$$

Los autovalores de  $S$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , se obtienen haciendo

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & h \\ -hc & 1 - h(a + kb) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando:

$$\lambda^2 + \lambda[h(a + kb) - 1] + \underbrace{[h^2c - h(a + kb) + 1]}_{T_i} = 0$$

La situación más comprometida se presenta cuando el sistema está subamortiguado, y en ese caso los autovalores de  $S$  serán complejos conjugados.

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = T_i$$

El módulo de los autovalores debe ser menor que uno para que el sistema sea estable, o sea:

$$T_i \leq 1$$

$$h^2c - h(a + kb) + 1 \leq 1$$

$$h[hc - (a + kb)] \leq 0$$

Como  $h > 0$ :

$$h < a + kb$$

Donde:

$$a = 4\pi\zeta$$

$$b = 4\pi^2$$

$$c = 4\pi^2$$

$$K \gg C$$

Entonces, reemplazando valores, y tomando  $K = C$ , que es el caso más desfavorable:

$$h < \zeta + \frac{z}{c}$$

donde:

$$\zeta = \frac{c}{2I\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{kI}}$$

$$z = \frac{R}{M_c}$$

$$\begin{aligned} C &= \max|\dot{\theta}| = \max|\dot{\omega}| = \max|\dot{\theta}^{**}| = \\ &= \max\left|\frac{k\dot{\theta}T_0}{M_c}\right| = \frac{kT_0}{M_c} \max|\dot{\theta}| \end{aligned}$$

El  $\max|\dot{\theta}|$  posible es cuando toda la energía del sistema es energía cinética.

$$\frac{1}{2} k\theta_0^2 + \frac{1}{2} I\dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2} I [\max|\dot{\theta}|]^2$$

$$\max|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{k}{I}\theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2} = \sqrt{(\omega_0\theta_0)^2 + \dot{\theta}_0^2}$$

## 6.2 Estudio de la estabilidad del programa DINAL

El comportamiento de cualquier sistema dinámico sin excitación constituido por una masa giratoria, un resorte y un amortiguador lineales, y que sufre fricción de Coulomb puede ser representado por la siguiente ecuación.

$$u'' + a u' + b \operatorname{sgn} u' + c u = 0$$

donde:

$$a = 4\pi\xi$$

$$b = 4\pi^2\zeta$$

$$c = 4\pi^2$$

Para analizar la influencia de  $h$  en los resultados obtenidos, se consideró  $\zeta = 0$ , de forma que la ecuación quedó finalmente:

$$u'' + a u' + c u = 0 \quad (9)$$

Y la condición de estabilidad es:

$$h \leq \xi$$

Dado que la ecuación (9) es lineal, es posible resolverlo analíticamente.

En la Figura 7, se observa la solución analítica de la (9) considerando  $\xi = 0,02387$

En la Figura 8, se observa la solución de la misma ecuación anterior, pero por medio del programa DINAL, tomando  $h = 0,005$ , que es un valor muy inferior al de  $\xi$ , con lo que la estabilidad del esquema numérico está asegurada. No hay diferencias visibles entre ambas soluciones.

En la Figura 9 se ve el trazado de la solución de la (9) tomando  $h=0,1$  que es un valor muy superior al máximo permitido. Al comparar esta curva con la de la Figura 1 se observa que el esquema tarda más en amortiguarse, errando por exceso, y presenta error en el paso, desfasándose en el transcurso del tiempo.

En las Figuras 10,11,12, y 13 se ha ido aumentando el valor de  $h$  por encima del admisible, y se observa como el esquema llega a ser violentamente divergente.

En el caso en que el sistema no está amortiguado, el esquema es siempre divergente, sin embargo, hasta valores de  $h$  como el de la Figura 14, ( $h=0,01$ ) el sistema no presenta divergencia apreciable a simple vista hasta  $t=50$ , y sólo existe un pequeño error en el paso. Sin embargo para  $h=0,1$  el sistema diverge violentamente.

Cuando  $h=0,1$ , en el primer semiperíodo el error aparece en la tercera cifra (es  $-1,014360$  en vez de  $-1$ ), cuando  $h=0,01$ , el error en el mismo intervalo aparece en la sexta cifra, mientras que cuando  $h=0,001$ , aún en el segundo semiperíodo no aparece error numérico.

Se observa en estos resultados la nobleza del método, que aún en los casos inestables brinda soluciones satisfactorias para el problema físico.-

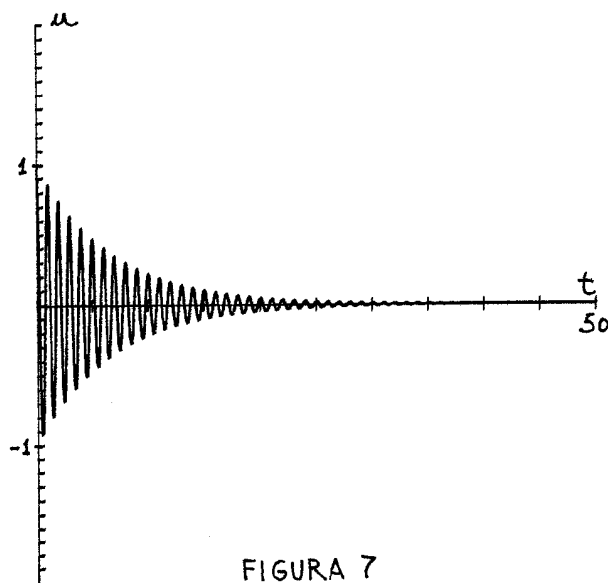


FIGURA 7

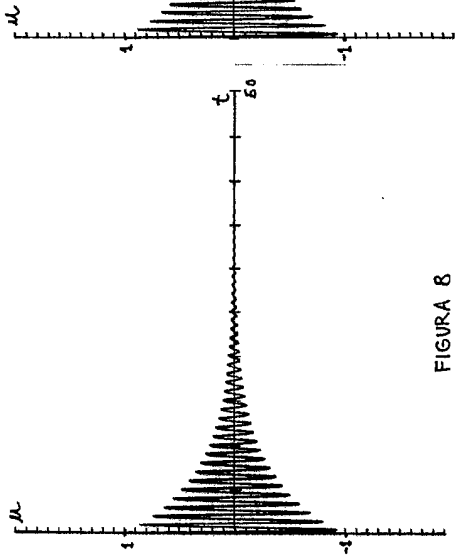


FIGURA 8

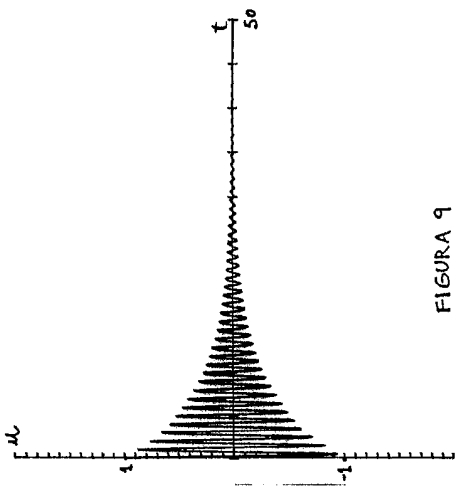


FIGURA 9

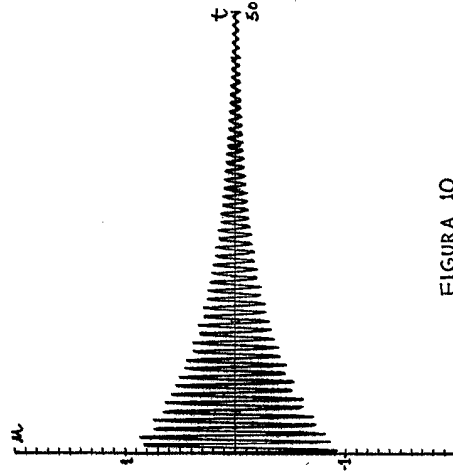


FIGURA 10

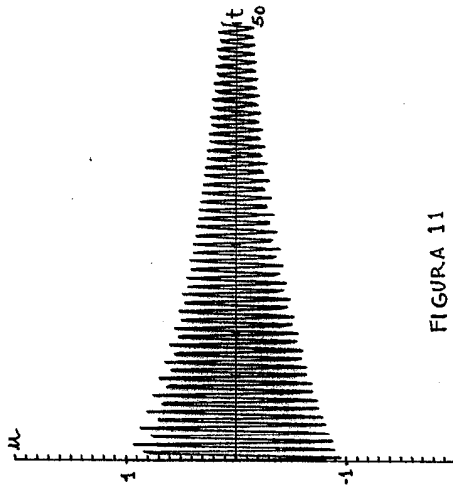


FIGURA 11

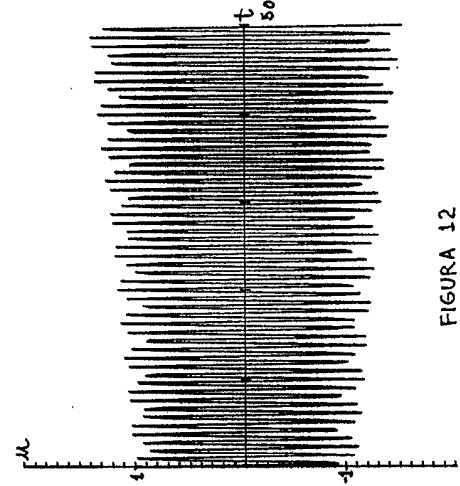


FIGURA 12

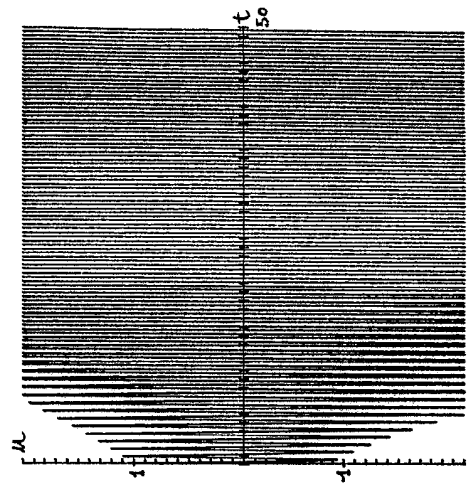


FIGURA 13



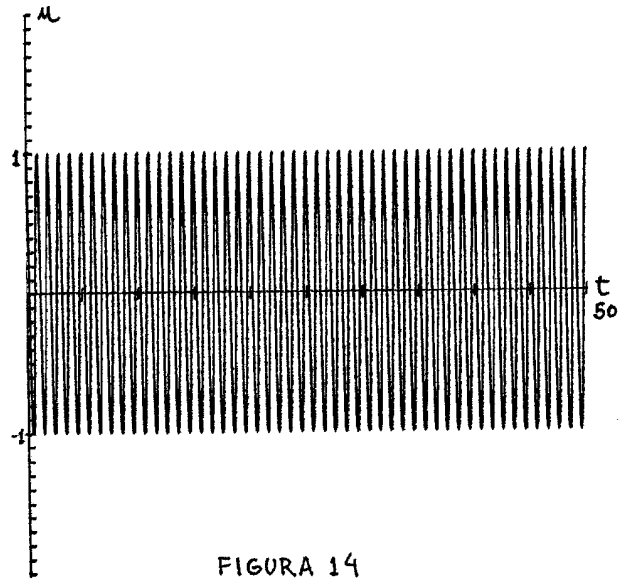


FIGURA 14

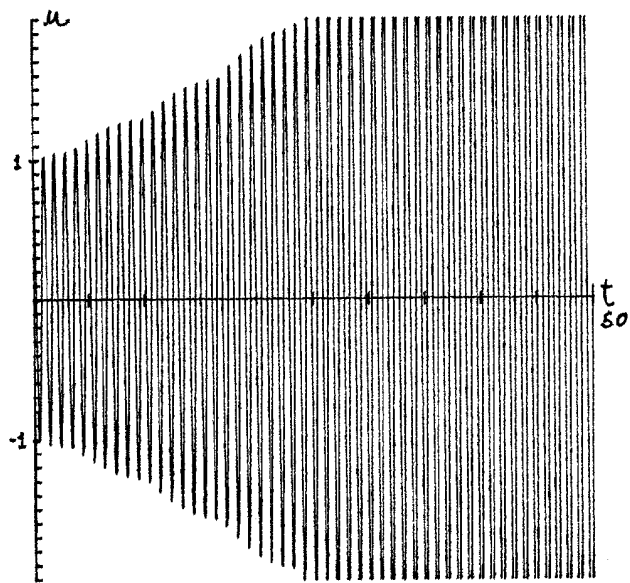


FIGURA 15

# 7. PROGRAMA DINAL

```

PROGRAM DINAL
REAL SI,SK,SC,SRD,SRE,ST0,ST10,TTMAX,DTT,TT,THETA,MOMG,KMAX,
* DTTMAX,TTSUP,MRG,MAG
DOUBLE PRECISION W0,SMC,DZETA,ZITA,PI2,T0,A,B,C,TMAX,K,T,
* X,Y,Z,Q11,Q12,Q13,Q14,Q21,Q22,Q23,Q24,U,V,U1,V1,VMAX
INTEGER NPUNT,I
C      Aqui hay que programar M*(t) (Aqui hay que programar M*(t)
M(TT)=0*TT      M(TT)=SIN(6.28*TT)
F(T,PI2,T0)=PI2**2*0*T0*T      F(T,PI2,T0)=PI2**2*SIN(6.28*T*T0)
Q1(Y,K)=K*Y
Q2(X,Y,Z,K,A,B,C)=K*(Z-C*X-B*SG(Y)-A*Y)
WRITE(*,10)
10  FORMAT(' Entrar I,k,c,Rd,Re,Ang.inic,Vel.inic,Mc'//)
READ(*,*)SI,SK,SC,SRD,SRE,ST0,ST10,SMC
W0=SQRT(SK/SI)
IF(SMC)30,40,30
40  SMC=SK*SQRT(ST0**2+(ST10/W0)**2)
30  DZETA=SC/SQRT(4*SK*SI)
ZITA=SRD/DABS(SMC)
PI2=6.28318530718
T0=PI2*SQRT(SI/SK)
WRITE(*,50)SI,SK,SC,SRD,SRE,W0,T0,DZETA
WRITE(*,51)ZITA,ST0,ST10,SMC
50  FORMAT(' ','I=',F7.3,3X,'k=',F7.3,3X,'c=',F7.3,3X,'Rd=',F7.3,3X,
* 'Re=',F7.3,3X,'w0=',F7.3,3X,'T0=',F7.3,3X,'DZETA=',F7.3//)
51  FORMAT(' ','ZITA=',F7.3,3X,'ang.inic=',F7.3,3X,'vel.inic=',F7.3
* ,3X,'Mc=',F7.3//)
A=2*DZETA*PI2
B=ZITA*PI2**2
C=PI2**2
VMAX=SQRT((W0*ST0)**2+ST10**2)
KMAX=DZETA+ZITA/VMAX
DTTMAX=T0*KMAX
TTSUP=10000*DTTMAX
WRITE(*,59)TTSUP,DTTMAX
59  FORMAT(' tsup=',F10.3,3X,'deltatmax=',F7.4//)
WRITE(*,60)
60  FORMAT(' Entrar tmax,deltat'//)
READ(*,*)TTMAX,DTT
TMAX=TTMAX/T0
K=DTT/T0
NPUNT=JINT(TTMAX/DTT+2)
WRITE(13,*)NPUNT
U=SK*ST0/SMC
V=SK*T0*ST10/SMC
200 T=0
TT=0
MOMG=SMC/SK*F(T,PI2,T0)/PI2**2
MRG=-SRD/SK*SG(V)
WRITE(13,*)TT,ST0,ST10/W0,MOMG,MRG,-T0*DZETA*ST10/3.1415927

```

```

70      DO 80 I=2,NPUNT
        X=U
        Y=V
        Z=F(T,PI2,T0)
        Q11=Q1(Y,K)
        Q21=Q2(X,Y,Z,K,A,B,C)
        X=U+Q11/2
        Y=V+Q21/2
        Z=F(T+K/2,PI2,T0)
        Q12=Q1(Y,K)
        Q22=Q2(X,Y,Z,K,A,B,C)
        X=U+Q12/2
        Y=V+Q22/2
        Z=F(T+K,PI2,T0)
        Q13=Q1(Y,K)
        Q23=Q2(X,Y,Z,K,A,B,C)
        X=U+Q13
        Y=V+Q23
        Z=F(T+K,PI2,T0)
        Q14=Q1(Y,K)
        Q24=Q2(X,Y,Z,K,A,B,C)
        U1=U
        V1=V
        U=U+(Q11+2*Q12+2*Q13+Q14)/6
        V=V+(Q21+2*Q22+2*Q23+Q24)/6
        T=T+K
        IF (.NOT.(DABS(V).LE.DABS(V1-V).AND.(ABS(F(T,
*      PI2,T0)-C*U).LE.(SRE*PI2**2/SMC)))) GOTO 20
        U=U1
        V=V1
20      TT=T*T0
        THETA=SMC/SK*U
        MOMG=F(T,PI2,T0)/PI2**2*SMC/SK
        MRG=-SRD/SK*SG(V)
        VEL=SMC/SK*V/W0
        MAG=-SMC*DZETA/SK/3.1415927*V
80      WRITE(13,*)TT,THETA,VEL,MOMG,MRG,MAG
        END

        FUNCTION SG(X)
        DOUBLE PRECISION X
        IF(X) 100,110,100
110      SGX=0
        GOTO 120
100      SGX=X/DABS(X)
120      SG=SGX
        RETURN
        END

```

\*: Caso de sistema excitado con  $M^*(t) = \text{sen}(2\pi t)$

### 7.1 Programa READIN

```

PROGRAM READIN
REAL A(6)
WRITE(*,10)
FORMAT(' Entrar Nx Ny : l=t 2=theta 3=vel 4=M 5=Mroz 6=Mamort')
10 READ(*,*)NX,NY
READ(13,*)NPUNT
WRITE(22,*)NPUNT
DO 20 I=1,NPUNT
READ(13,*)(A(J),J=1,6)
WRITE(22,*)A(NX)
WRITE(23,*)A(NY)
20 END

```

### 7.2 Programa DRAAR

```

PROGRAM DRAAR
REAL X1(10100),Y1(10100),XEXH(2),XEXV(2),YEXH(2),YEXV(2),XMAR(2),
* YMAR(2),DURX(2),DURY(2)
INTEGER WS_ID
DATA GRS$ MARKER_TYPE PLUS/2/,SEG_NAME/1/
DATA WS_ID/1/,BLUE/3/
INCLUDE 'SYS$LIBRARY:GKSDEFS.FOR'
OPEN(UNIT=22,FILE='FOR022.DAT',STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=23,FILE='FOR023.DAT',STATUS='OLD')
WRITE(*,10)
10 FORMAT(' Entrar xmin, xmax, ymin, ymax')
READ(*,*)XMIN,XMAX,YMIN,YMAX
WRITE(*,50)
50 FORMAT(' Dibujo ejes ? S=1 N=0')
READ(*,*)OPC
IF(OPC)110,120,110
110 WRITE(*,100)
100 FORMAT(' Entrar divx,divy')
READ(*,*)DIVX,DIVY
WRITE(*,101)
120 FORMAT(' Entrar viewport : Xmin, Xmax, Ymin, Ymax, (max=19.7 cm)')
101 READ(*,*)VP1,VP2,VP3,VP4
VP5=.0505617*VP1
VP6=.0505617*VP2
VP7=.0505617*VP3
VP8=.0505617*VP4
XEXH(1)=0
XEXH(2)=1
XEXV(1)=-XMIN/(XMAX-XMIN)
XEXV(2)=XEXV(1)
YEXH(1)=-YMIN/(YMAX-YMIN)
YEXH(2)=YEXH(1)
YEXV(1)=0
YEXV(2)=1

```

```

      READ(22,*)NPUNT
      DO 20 I=1,NPUNT
      READ(22,*)X
      X1(I)=(X-XMIN)/(XMAX-XMIN)
      READ(23,*)Y
20    Y1(I)=(Y-YMIN)/(YMAX-YMIN)
      DIVX1=DIVX/(XMAX-XMIN)
      DIVY1=DIVY/(YMAX-YMIN)
      CALL GKS$OPEN_GKS('SYS$ERROR:')
      CALL GKS$OPEN_WS(WS_ID,GKS$_CONID_DEFAULT,GKS$_K_WSTYPE_DEFAULT)
      CALL GKS$OPEN_WS(WS_ID,'TXA5:',13)
      CALL GKS$ACTIVATE_WS(WS_ID)
      CALL GKS$SET_VIEWPORT(1,VP5,VP6,VP7,VP8)
      CALL GKS$SELECT_XFORM(1)
      CALL GKS$CREATE_SEG(SEG_NAME)
      IF(OPC) 60,70,60
60    DO 30 J=XMIN/DIVX,XMAX/DIVX
      XMAR(1)=J*DIVX1+XEXV(1)
      XMAR(2)=XMAR(1)
      DURX(1)=YEXH(1)-.01
      DURX(2)=YEXH(1)+.01
30    CALL GKS$POLYLINE(2,XMAR,DURX)
      DO 40 K=YMIN/DIVY,YMAX/DIVY
      YMAR(1)=K*DIVY1+YEXH(1)
      YMAR(2)=YMAR(1)
      DURY(1)=XEXV(1)-.01
      DURY(2)=XEXV(1)+.01
40    CALL GKS$POLYLINE(2,DURY,YMAR)
      CALL GKS$POLYLINE(2,XEXH,YEXH)
      CALL GKS$POLYLINE(2,XEXV,YEXV)
70    CALL GKS$POLYLINE(NPUNT,X1,Y1)
      CALL GKS$CLOSE_SEG()
      CALL GKS$DEACTIVATE_WS(1)
      CALL GKS$CLOSE_WS(1)
      CALL GKS$CLOSE_GKS()
      END

```

## 8. RESULTADOS OBTENIDOS

Se graficará la evolución temporal correspondiente a diversas clases de sistemas dinámicos, y también el gráfico del plano de fase. En este último gráfico la distancia de cada punto al origen indica un estado energético del sistema.

Las coordenadas de un punto P serán:  $\begin{cases} \theta_P \\ \dot{\theta}_P/\omega_0 \end{cases}$

La distancia de P al origen es:

$$\overline{P-0} = \sqrt{\theta_P^2 - \left(\frac{\dot{\theta}_P}{\omega_0}\right)^2}$$

La energía del sistema en el punto P es

$$E = \frac{k}{2} \left[ \theta_P^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_P}{\omega_0}\right)^2 \right]$$

Por lo tanto:

$$E = \frac{k}{2} \overline{P-0}^2$$

Las líneas isoenergéticas serán circunferencias con centro en el origen.

Para que las salidas del programa sean adimensionales hay que considerar:

Momento de inercia unitario:  $J = 1$

Período unitario:  $T_0 \neq 1$

como  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}$

$$k = (2\pi)^2 \approx 39,48$$

Para que el máximo desplazamiento sea unitario:  $\theta_{max} = 1$

$$M_c = k \approx 39,48$$

8.1 Comportamiento libre sin rozamiento

En esta sección se considerará  $\gamma = 0$  y  $R_c = 0$ .

La velocidad inicial es siempre  $\dot{\theta}_0^{**} = 2\pi$  y la posición inicial  $\theta_0^{**} = 0$

8.1.1 Régimen subamortiguado

$$\gamma = 0,239$$

$$h = 0,01$$

(paso temporal del esquema numérico)

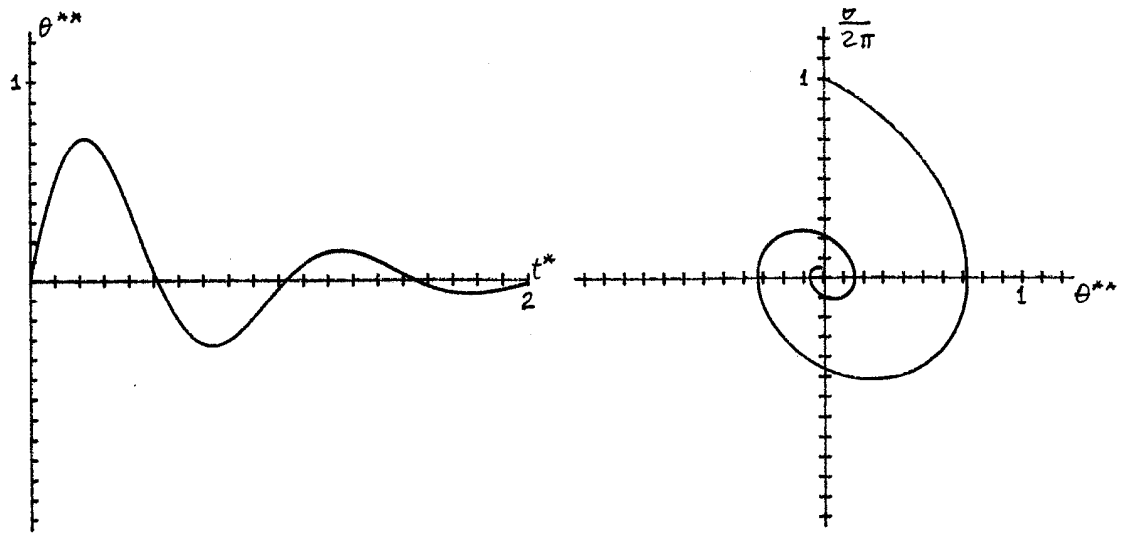


FIGURA 16

La parte izquierda de la figura 16, muestra la evolución del sistema a lo largo del tiempo.

La parte derecha, el gráfico del plano de fase en donde se ve que el sistema se amortigua en forma de espiral exponencial, y su punto final es el origen de coordenadas, o sea, el reposo en el punto cero.

#### 8.1.2 Régimen crítico

$$\zeta = 1$$

$$\eta = 0,01$$

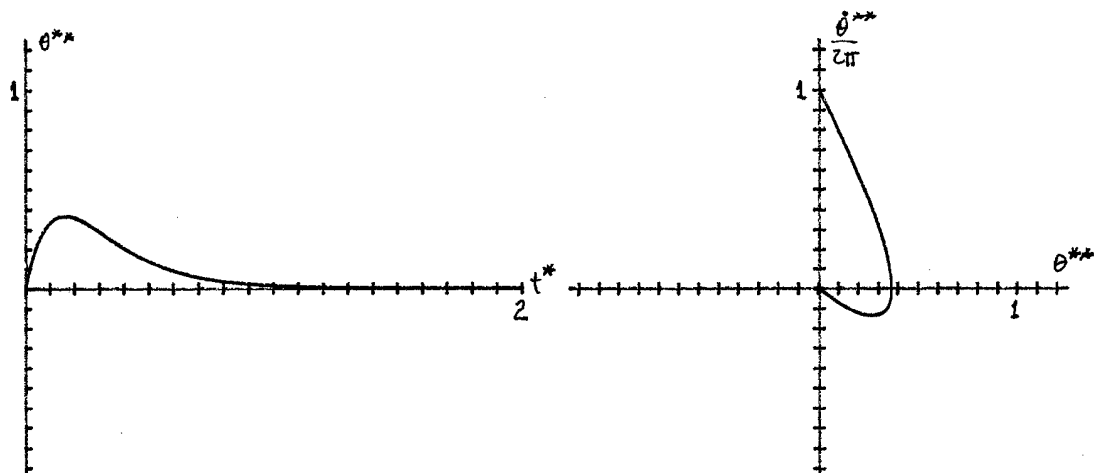


FIGURA 17

En éste régimen se observa que debido a que no hay oscilaciones, en el plano de fase no complementan ciclos.

### 8.1.3 Régimen sobreamortiguado

$$\xi = 2,387$$

$$h = 0,01$$

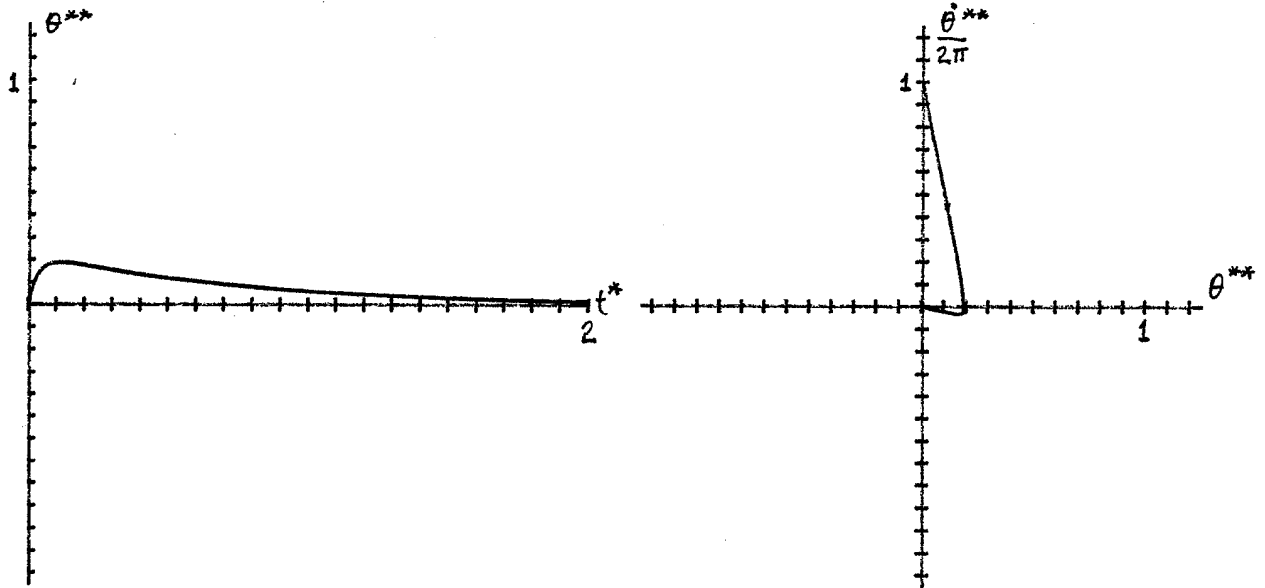


FIGURA 18

Se observa que el máximo desplazamiento es menor que en el caso anterior pero el sistema tarda más en llegar a reposo.

## 8.2 Comportamiento forzado sin rozamiento

En ésta sección, además de no haber rozamiento, se considerará una excitación  $M^*(t^*) = \text{sen}(2\pi t^*)$ .

Como  $T_0 = 1$ ,  $\omega_0^* = 2\pi$ , lo que significa que ésta es la excitación de resonancia del sistema.

La velocidad inicial es  $\dot{\theta}_0^{**} = 0$  y la posición inicial  $\theta_0^{**} = 1$

### 8.2.1 Régimen subamortiguado

$$\xi = 0,239$$

$$h = 0,01$$



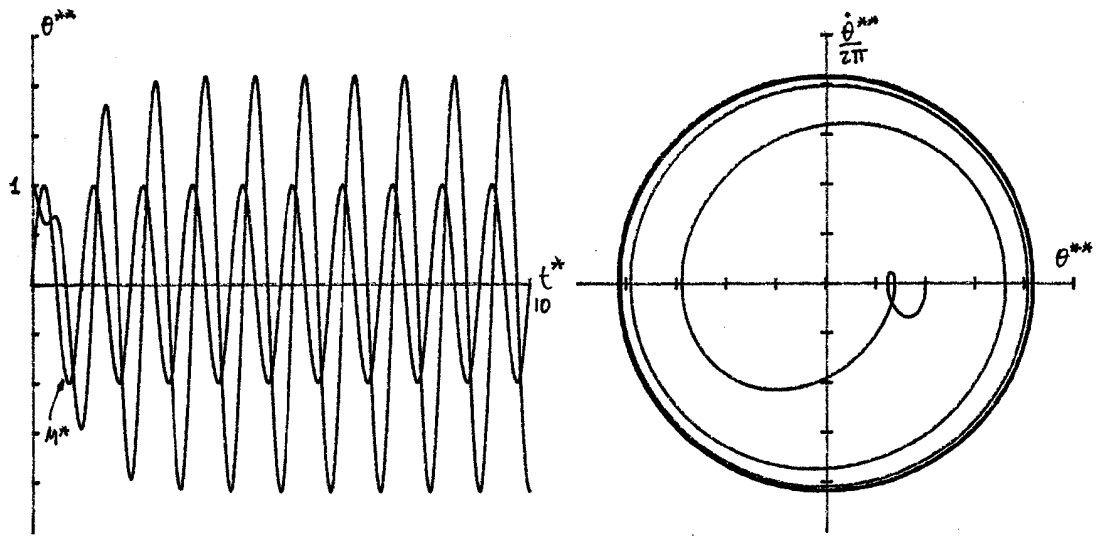


FIGURA 19

En el cuadro izquierdo de la Figura 19, se halla superpuesto al gráfico de  $\theta^{**}$ , el de  $M^{**}(t^{**})$ . Se observa que luego de un breve régimen transitorio, el sistema se estabiliza en  $\theta_{max}^{**} = 2,12$ , que coincide con lo predicho en la Figura 3.

En el cuadro derecho de la Figura 19, se ve como luego del transitorio, el esquema oscilará en forma circular en el plano de fase. Si  $\frac{\omega}{\omega_0} \neq 1$ , oscilará en forma elíptica.

#### 8.2.2 Régimen crítico

$$\xi = 1$$

$$h = 0,01$$

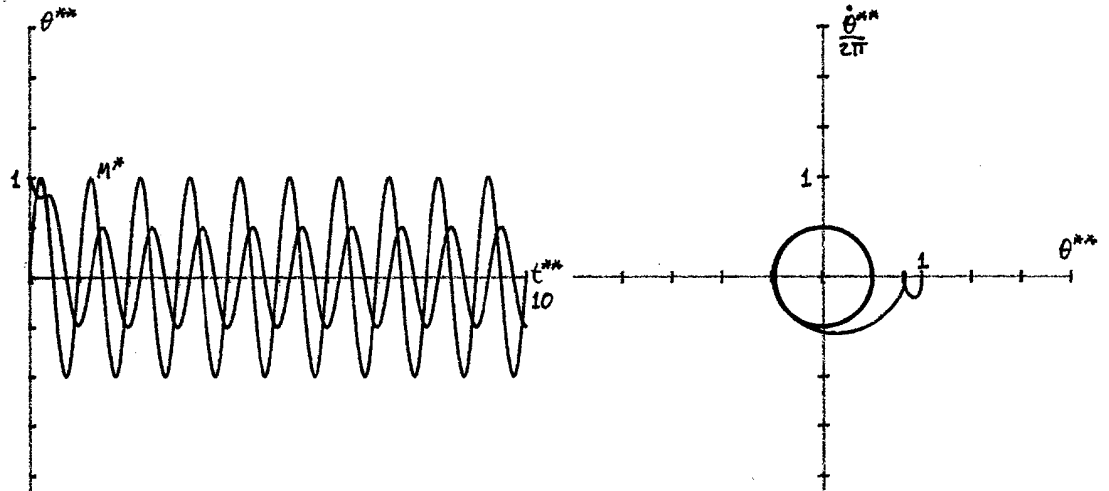


FIGURA 20

Se observa que en éste tipo de régimen se consigue el transitorio más breve.

### 8.2.3. Régimen sobreamortiguado

$$\xi = 2,387$$

$$h = 0,01$$

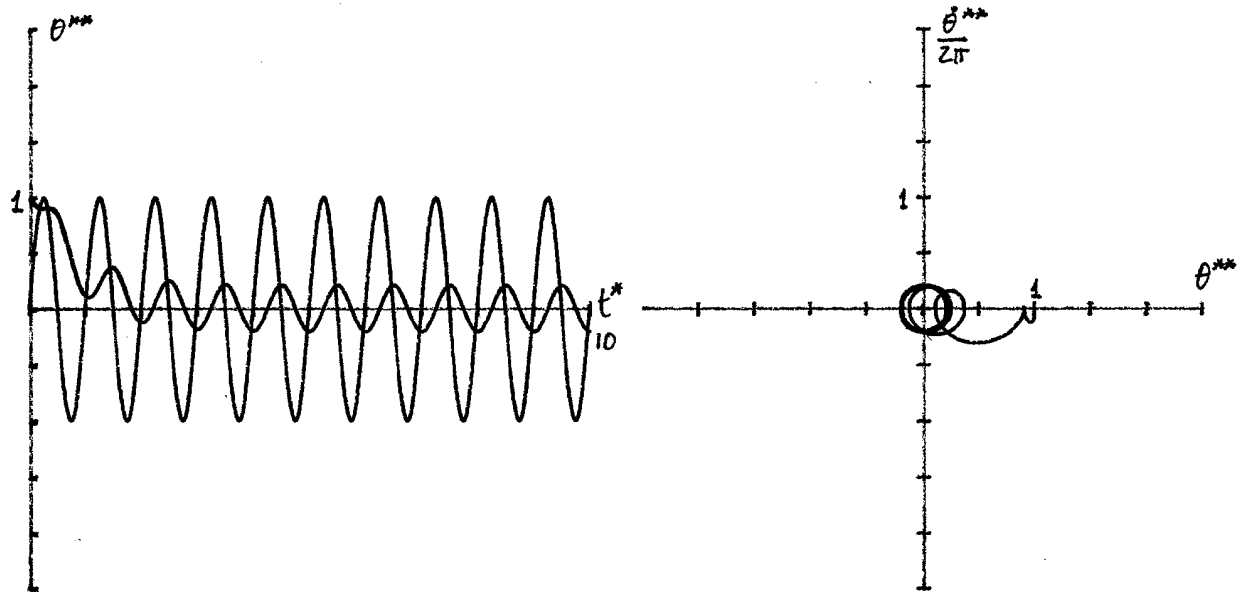


FIGURA 21

Se observa en ésta figura y en las anteriores, que en el plano de fase, el círculo que representa el régimen permanente es menor cuanto mayor es la amortiguación, lo que significa que el estado energético del sistema será cada vez menor.

### 8.3 Comportamiento libre con rozamiento

En ésta sección se considerará  $\xi = 0$ , y  $R_d = R_c$ .

La velocidad inicial es siempre  $\dot{\theta}_0^{**} = 2\pi$  y la posición inicial

$$\theta_0^{**} = 0$$

Si se toma

$$\xi = 0,167$$

$$h = 0,001$$

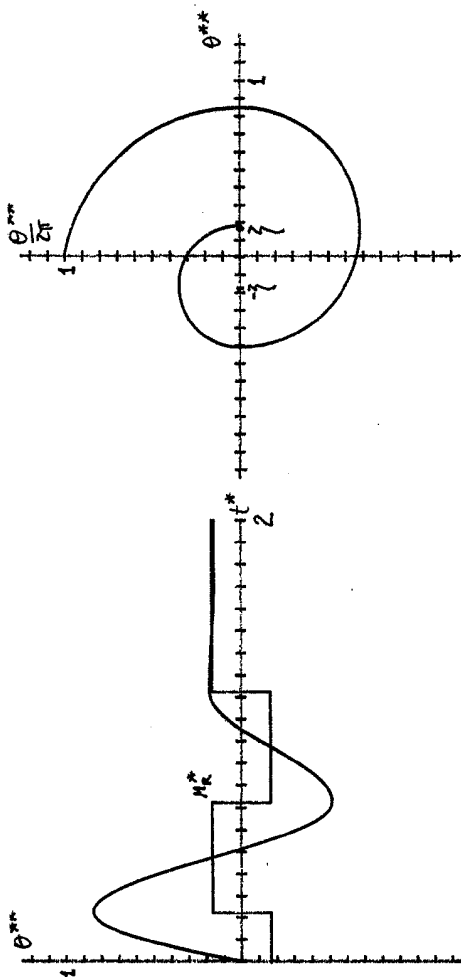


FIGURA 22

Se ha reducido en éste caso el valor de  $h$ , para determinar con mayor precisión el momento en que cambia de sentido el movimiento.

En el cuadro derecho de la Figura 22 se ve que la curva del plano de fase es una espiral de dos centros:  $\theta^{**} = 1$ , sobre el eje  $\theta^{**}$ . El punto de reposo puede ser cualquiera sobre el eje mencionado, y entre los dos centros.

En el cuadro izquierdo se ve como la función va decreciendo aritméticamente hasta llegar al reposo. Sobre la función se halla superpuesto el valor del momento de rozamiento.

Dado que la amplitud de la oscilación disminuye en cada período, y el sistema se puede detener en cualquier posición entre 0 y  $1$ , se puede plantear  $1 - \zeta t^* = A$  donde  $A \in [0, 1]$

Despejando, se puede calcular aproximadamente el tiempo que el sistema tardará en estabilizarse:  $t^* = \frac{1-A}{\zeta}$

Si es pequeño ( $\zeta < 0.1$ )  $t^* = \frac{1}{\zeta}$

Como siempre en el caso de vibraciones libres:  $M_C = k \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega_0^2}}$

#### 8.4 Comportamiento forzado con rozamiento

Si se considera una excitación con la frecuencia de resonancia, la Figura 5a predice que si  $\zeta < 0.167$ , la oscilación del sistema será divergente. Este es el caso de la Figura 23 con  $\zeta = 0.167$

$$h = 0.01$$

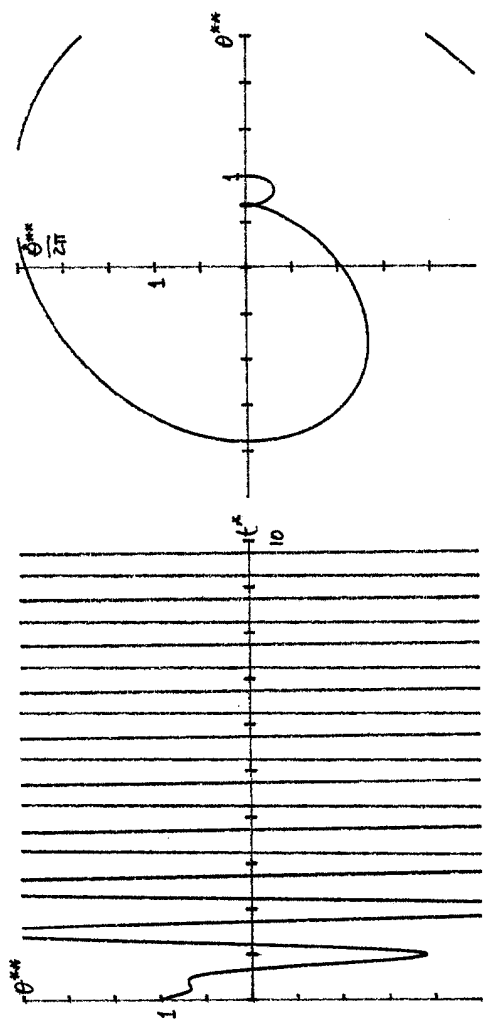


FIGURA 23

Con  $\zeta = 0,836$ , la Figura 5a predice  $\phi = 0,14$  y un punto de reposo por semicíclo, y es esto lo que se observa en la Figura 24, con

$$\zeta = 0,836$$

$$\eta = 0,01$$

En el punto 4.2 se hace una aproximación lineal del rozamiento. En la Figura 25, se grafican superpuestas las curvas calculadas con  $\zeta = 0,5$  y el correspondiente valor de  $\eta$ ,  $\eta = 0,242$ , para  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1,315$ . Esta aproximación está dada dentro de la zona de validez de la Figura 5a, y se observa su excelente coincidencia.

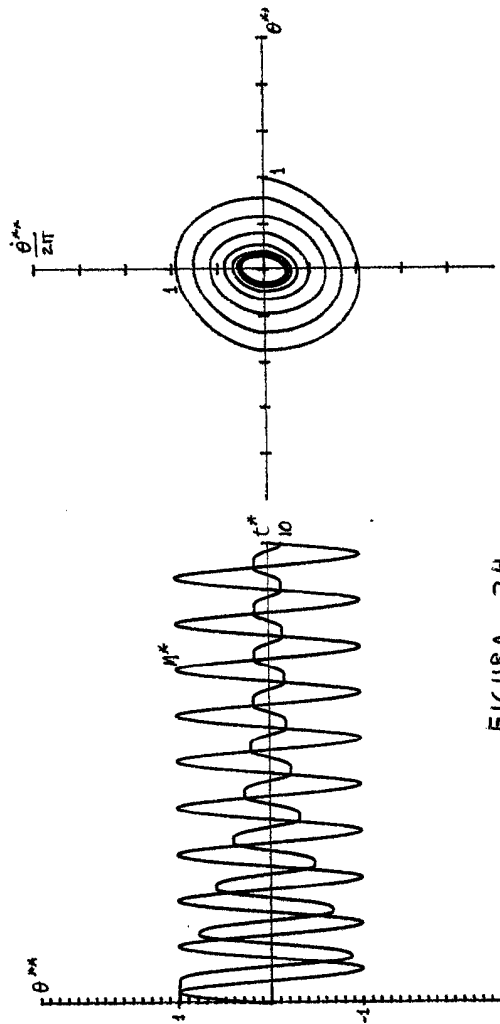


FIGURA 24

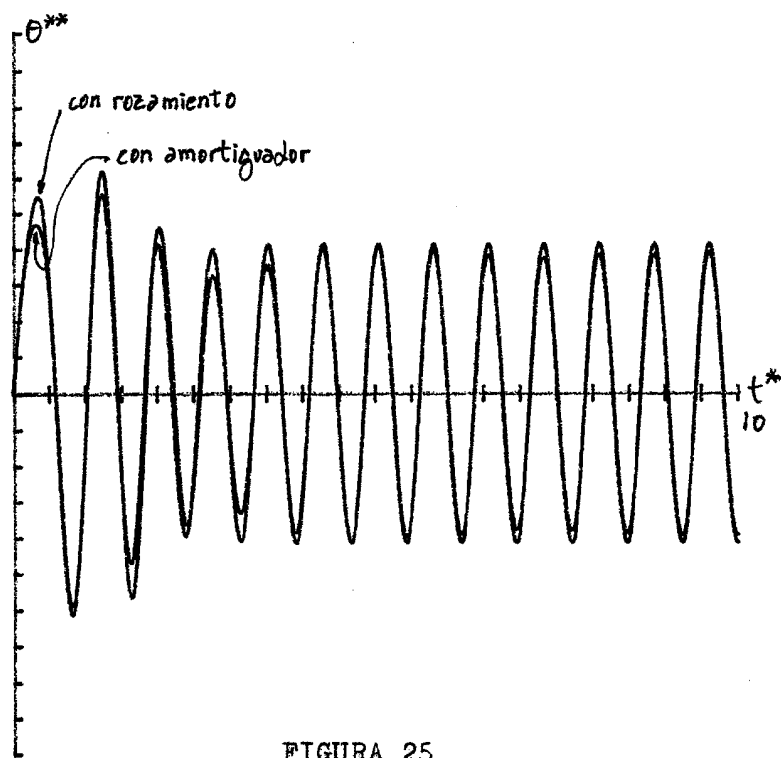


FIGURA 25

### 8.5 Comportamiento libre mixto

En éste caso existen tanto la fricción seca como la viscosa. Se considera  $R_c = R_d$

En la Figura 26 se grafica la evolución de un sistema con:

$$\begin{aligned} \zeta &= 0,119 \\ \gamma &= 0,06 \\ \eta &= 0,002 \end{aligned}$$

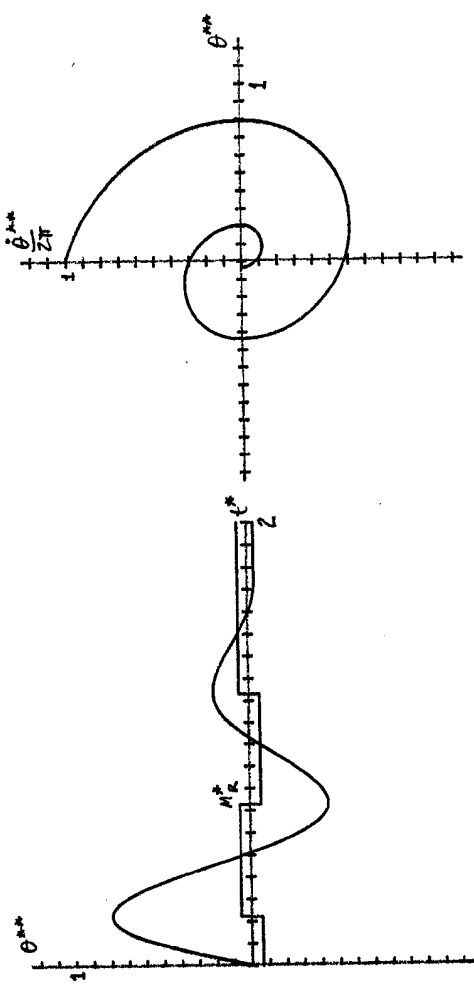


FIGURA 26

El punto de reposo del sistema, puede no ser el origen del plano fase.

### 8.6 Comportamiento forzado mixto

$$\begin{aligned} \zeta &= 0,119 \\ \gamma &= 0,418 \\ \eta &= 0,01 \end{aligned}$$

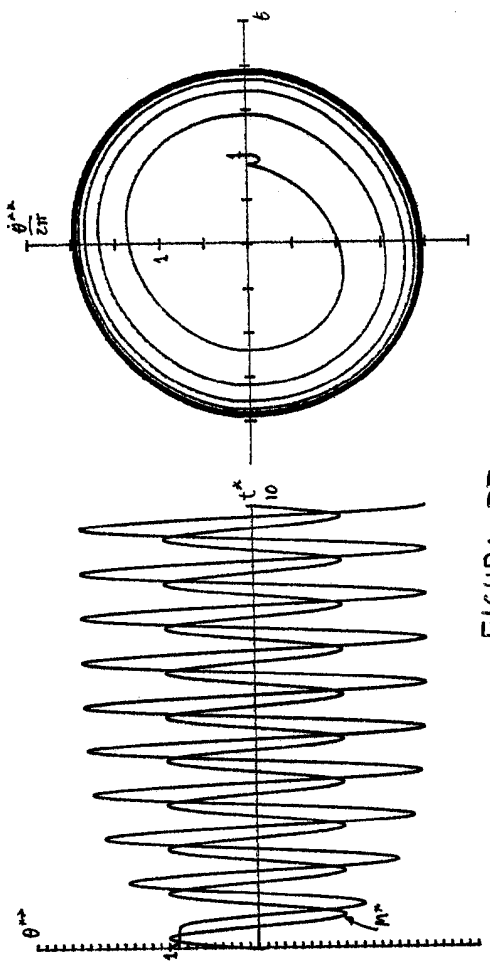


FIGURA 27

## 9. CONCLUSIONES

Con el programa DINAL, se ha obtenido una poderosa herramienta para el análisis de los sistemas dinámicos de un grado de libertad que incluyen fricción.

Los resultados obtenidos coinciden con los predichos por el libro de DEN HARTOG "Mechanical Vibrations", o con el caso de las soluciones calculadas analíticamente cuando es posible.

También se verificó la estimación de la duración del régimen transitorio cuando existe fricción seca.

Se comprobó la notable estabilidad del esquema numérico propuesto, sin embargo, es conveniente tomar pasos temporales menores que el máximo admisible a fin de que las soluciones sean precisas. En el caso de sistemas con rozamiento es conveniente que sea siempre  $h < 0,01$ , pues es necesaria una gran precisión para determinar el momento en que cambia de sentido, el movimiento.

## BIBLIOGRAFIA

REZK, H. : "Introducción a la dinámica de las estucturas".

DEN HARTOG : " Mechanical Vibrations".

MARSICANO : " Mecánica ".

JACOBSEN AYRE : "ENGINEERING VIBRATIONS".