

CONCEPTOS DEL FUNCIONAMIENTO DE LOS
REGULADORES CENTRIFUGOS DE VELOCIDAD

Preparado por: Patricio F. Mendez

Dirigido por : Ricardo A. Bastianon

DICIEMBRE 1988

INDICE

1. INTRODUCCION

2. CONCEPTOS PRIMARIOS

- 2.1 Regulador centrífugo
- 2.2 Fuerza de control
- 2.3 Fuerza de acción
- 2.4 Tipos de reguladores
- 2.5 Componentes de un regulador
- 2.6 Figura de análisis de las masas giratorias
- 2.7 Figura de análisis del manguito
- 2.8 Curva de F
- 2.9 Grado de irregularidad

3. REDUCCION DEL SISTEMA DINAMICO A

UNA UNICA COORDENADA

- 3.1 Reducción de una fuerza
- 3.2 Reducción de una masa
- 3.3 Reducción de una constante elástica
- 3.4 Reducción de una constante de amortiguación viscosa
- 3.5 Reducción de un regulador a una de las masas giratorias
- 3.6 Condición de estabilidad del sistema

3.7 Pulsación natural del sistema

3.8 Sensibilidad de un regulador

3.9 Relaciones cinemáticas

4. EFECTOS DE LA FRICCION DE COULOMB

4.1 Coeficiente de insensibilidad

4.2 Grado de irregularidad total

5. ANALISIS DE DIFERENTES REGULADORES

5.1 Reguladores de pesos

5.1.1 Modelo general.

5.1.2 Regulador de Watt

5.1.2.1 Fuerza de control

5.1.2.2 Fuerza de acción

5.1.2.3 Sensibilidad

5.1.2.4 Masa reducida

5.1.3 Regulador de Porter

5.1.3.1 Fuerza de control

5.1.3.2 Fuerza de acción

5.1.3.4 Masa reducida

5.1.4 Regulador de Kley

5.1.4.1 Fuerza de control

5.1.4.2 Fuerza de acción

5.1.4.3 Sensibilidad

5.1.4.4 Masa reducida

5.1.5 Regulador de Proell o de
suspensión invertida

5.1.5.1 Modelo

5.1.5.2 Fuerza de control

5.1.5.3 Análisis

5.2 Reguladores de resortes

5.2.1 Variación del número de
vuelatas deseado

5.2.2 Variación del grado de
irregularidad

5.2.3 Reguladores Harting
primitivo y Hartnell.

5.2.3.1 Modelo

5.2.3.2 Fuerza de control

5.2.3.3 Análisis

5.2.4 Regulador de Trenck

5.2.4.1 Modelo

5.2.4.2

5.2.4.3 Análisis

5.2.5 Regulador de Beyer

5.2.5.1 Modelo

5.2.5.2 Fuerza de control

5.2.5.3 Análisis

5.2.6 Regulador Harting de
resortes transversales

5.2.6.1 Modelo

5.2.6.2 Fuerza de control

5.2.6.3 Análisis

5.2.7 Regulador de Tolle

5.2.7.1 Modelo

5.2.7.2 Fuerza de control

5.2.7.3 Análisis

6. CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFIA

I. INTRODUCCION

En este trabajo se describe la forma de estudio de los reguladores centrífugos de velocidad, definiendo los parámetros que rigen su comportamiento y analizando su influencia.

El objetivo es sentar un método de trabajo para el análisis de los sistemas centrífugos de control. Con esta base se analizarán distintos tipos de reguladores y se evaluarán sus ventajas y desventajas a fin de comprender su evolución cronológica.

El método de trabajo es similar al propuesto por Tolle en 1909, (ref.1), pero se definirán nuevos parámetros y conceptos que permitirán simplificar el análisis.

Los resultados obtenidos por Tolle se ajustan muy bien a la realidad, y no hubo mayores avances en de los reguladores centrífugos hasta la actualidad.

Debido a que el sistema durante su funcionamiento correcto experimenta pequeñas desviaciones de su posición de equilibrio, se lo aproximará a un sistema lineal de masa y resorte, con fricción de coulomb, - más un amortiguador viscoso lineal en caso de que haya alguno en el sistema.

Durante este estudio no se analizará la interacción entre el regulador y el ente regulado, y por lo tanto lo que se obtendrá será la respuesta del regulador frente a variaciones de velocidad y perturbaciones arbitrarias.

2. CONCEPTOS PRIMARIOS

2.1 Regulador Centrífugo

Sistema de control que tiene por objetivo mantener constante la velocidad de rotación de una máquina motriz.

La fuerza para realizar la acción de control proviene de la fuerza centrífuga que experimentan las masas giratorias. Estas masas giratorias pueden acercarse o alejarse del eje de rotación, siendo este movimiento el que sitúa al sistema de regulación de la máquina motriz en la posición necesaria para mantener la velocidad constante.

2.2. Fuerza de control

Es la componente en dirección radial de la fuerza que el sistema transmite a cada una de las masas centrífugas. Esta fuerza se opone a la fuerza centrífuga. Si se desvincula una de las masas del sistema.

En la Figura 1, F_c es la fuerza centrífuga, m es la masa centrífuga, N es la fuerza que el sistema le transmite, y F es la fuerza de control.

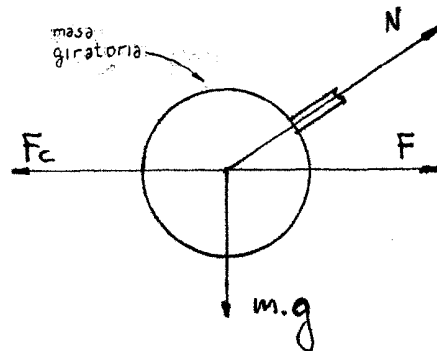


FIGURA 1

2.3 Fuerza de acción

Es la fuerza en dirección del movimiento del manguito que se opone al efecto de la fuerza centrífuga. A esta fuerza se la suele llamar impropiamente "energía" del regulador.

Si se desvincula al manguito del sistema

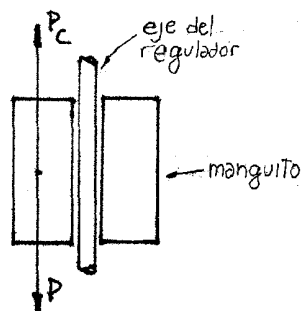


FIGURA 2

En la figura 2, P_c es el efecto de la fuerza centrífuga sobre el manguito, y P es la fuerza de acción.

2.4. Tipos de reguladores

Si la fuerza de control es causada sólo por el peso de las masas actuantes, el regulador será un "regulador de pesos".

Si esta fuerza es total o parcialmente causada por la acción de uno o más resortes, se tendrá un "regulador de resortes".

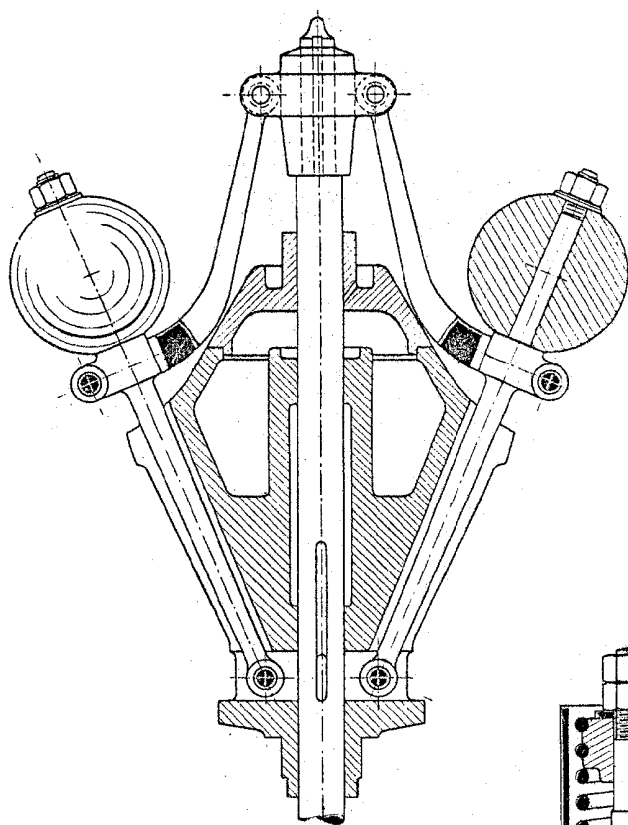
Si las masas giratorias están fijadas a una varilla pendular, será un "regulador cónico", y si las masas se mueven sobre una superficie plana perpendicular al eje, será un regulador "axial" o "plana".

Los reguladores de Watt, Porter, Kley y Proell, son cónicos y de pesos.

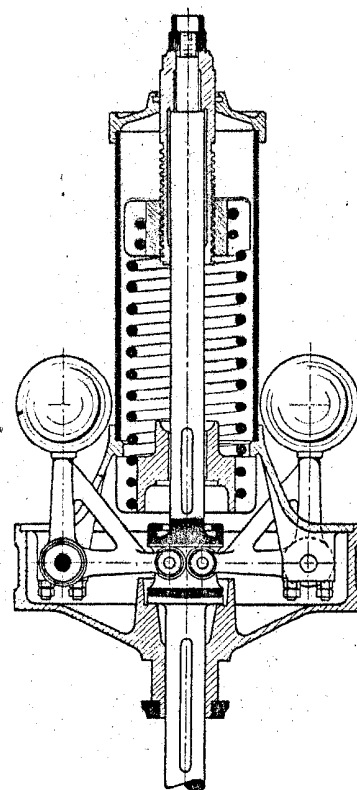
Los reguladores Hartnell, Beyer, Hartung primitivo, y Tolle son cónicos y de resortes.

El regulador Hartung de resortes transversales es axial y de resortes. No se han usado reguladores axiales y de pesos.

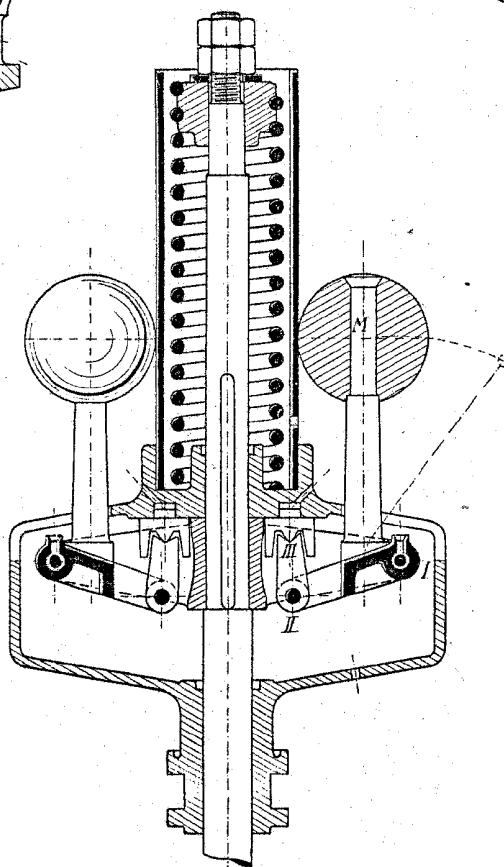
En las figuras 3 y 4 se ven distintos tipos de reguladores



Proell

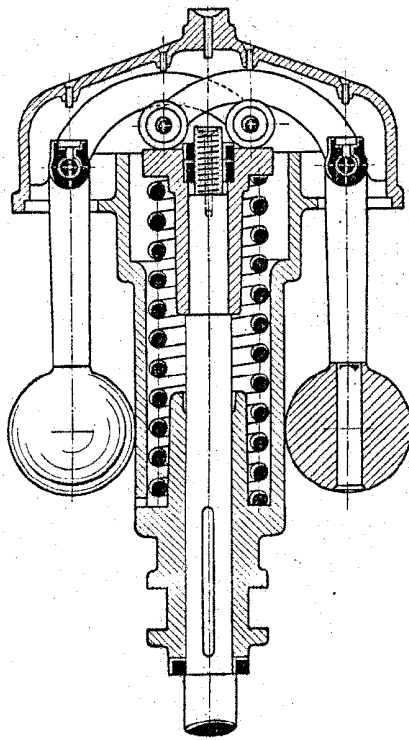


Lenz
(similar al Hartnel)

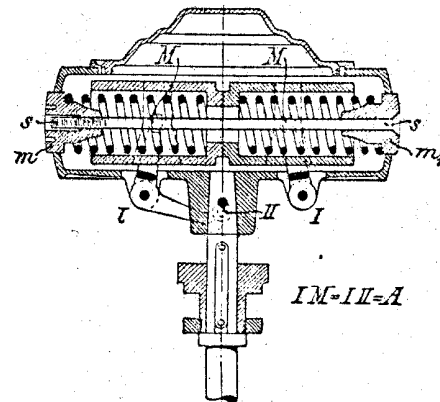


Beyer

FIGURA 3a



Trenck



IM-II-A

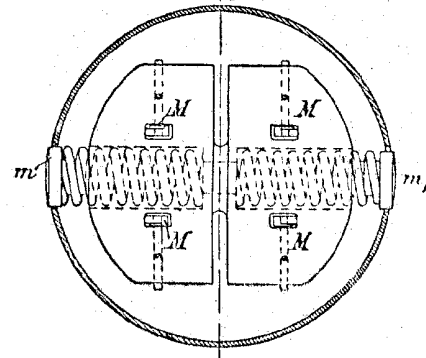
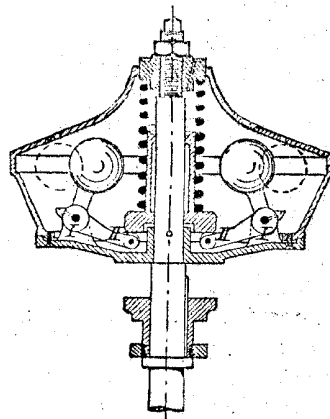
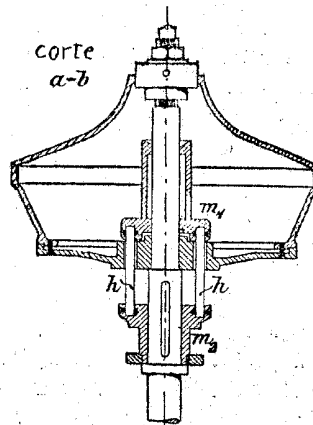
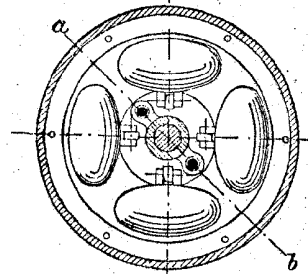
Hartung de ressortes
transversalesHartung
primitivocorte
a-b

FIGURA 36

2.5 Componentes de un regulador

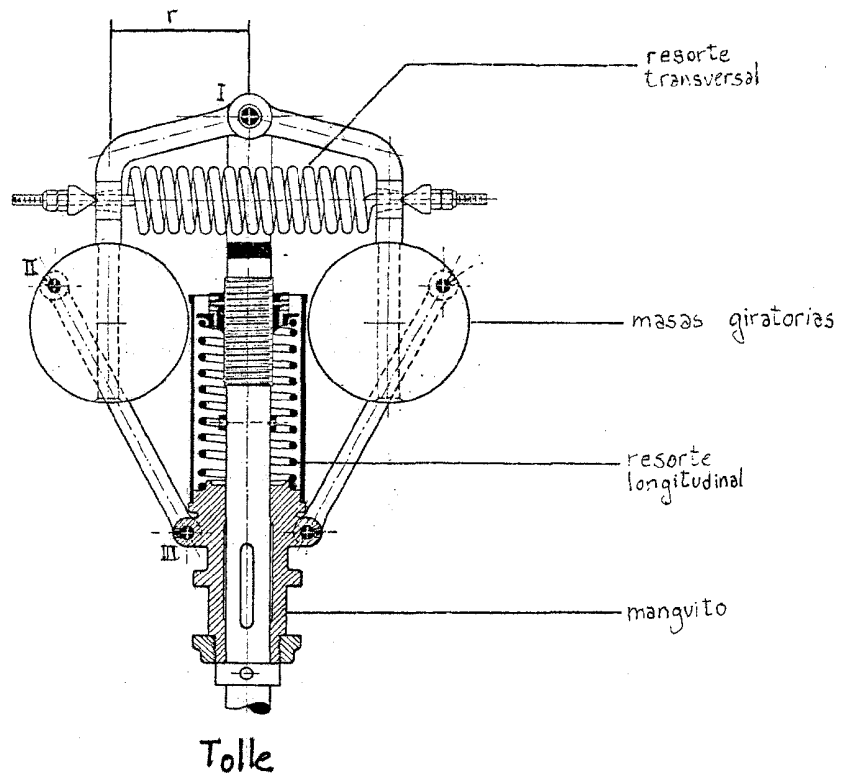
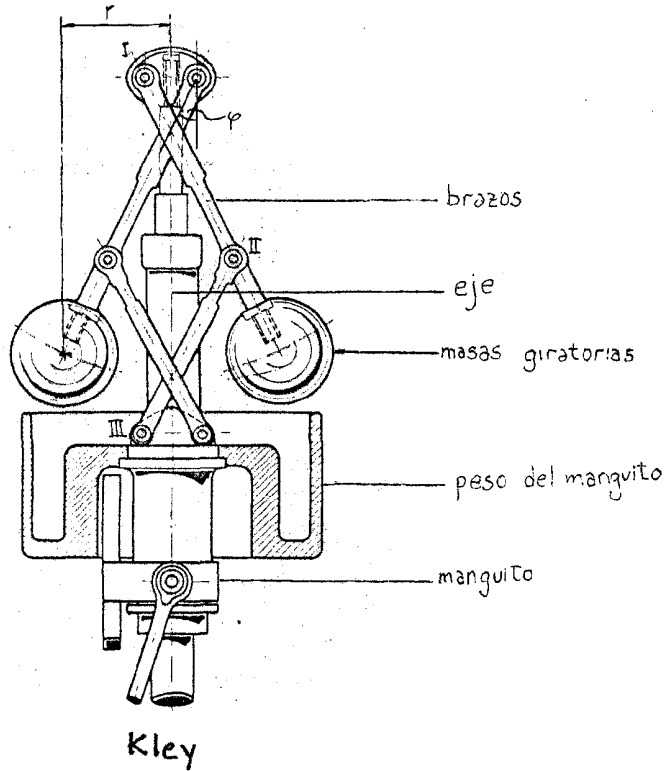


FIGURA 4

2.6 Figura de análisis de las masas giratorias

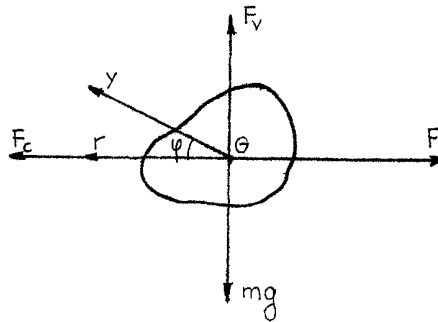


FIGURA 5

F :Fuerza de control

F_c :fuerza centrífuga

r :Coordenada radial

y : -coordenada en la dirección tangente al movimiento sobre el plano de referencia fijo al regulador, que contiene al eje del mismo y a la masa giratoria.

G :centro de gravedad de la masa giratoria

m :masa del cuerpo giratoria

F_v :fuerza que se opone al peso de las masas giratorias

ψ :ángulo entre la coordenada y , y la coordenada r .

2.7 Figura de análisis del manguito

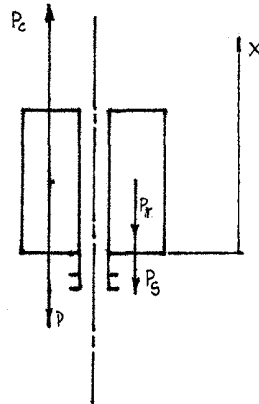


FIGURA 6

- P_c :efecto de la fuerza centrífuga sobre el manguito
- P :efecto de fuerza de control sobre el manguito, si en el regulador no hubiese fricción. es lo que Tolle llama impropiamente "energía del regulador" .
- P_r :efecto de la fricción propia del regulador sobre el manguito.
- P_s :efecto de la fricción del sistema a regular sobre el manguito.
- X :coordenada en la dirección del desplazamiento del manguito.

2.8 curva de F

Es uno de los elementos más importantes para el análisis de un regulador. Tolle la llama "Curva C".

Es la curva que se obtiene al trazar los valores de F en función de los valores de r , en un par de ejes cartesianos.

Tiene la importante propiedad de que para una misma masa y velocidad de giro, la curva de fuerza centrífuga en función del radio es una recta que pasa por el origen.

Si ω es la velocidad de rotación del regulador

$$F_c = m \omega^2 r$$

Como m y ω son constantes

$$F_c \propto r$$

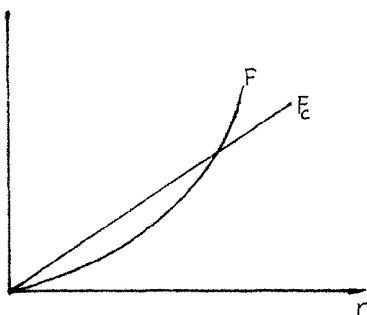


FIGURA 7

2.9 Grado de irregularidad

Si se desea que el regulador funcione entre una velocidad mínima ω_1 y una velocidad máxima ω_2 , y en el punto de equilibrio deseado su velocidad sea ω_e , se define como grado de irregularidad δ :

$$\delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_e}$$

Si ω_2 y ω_1 son muy próximos, se puede aproximar ω_e .

$$\omega_e \approx \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

Si se multiplica y divide la primera ecuación por ω_e .

$$\delta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2 \omega_e^2}$$

Si ahora se multiplica y divide por $m \cdot r$, se obtendrán las fuerzas centrífugas correspondientes a cada uno de los puntos tomados.

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{F_{c2} - F_{c1}}{F_{ce}}$$

Si se toman F_{c2} , F_{c1} y F en $r=r_2$, es muy clara la interpretación gráfica del valor de δ .

Como la diferencia entre los valores extremos de las fuerzas centrífugas es dado por el segmento \overline{AB} , y el valor de F_{ce} en $r=r_2$ es el segmento \overline{CD} .

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

El grado de irregularidad indica la variación de velocidad que se permite entre los puntos máximos y mínimos de la regulación. Por ejemplo en un motor de vapor, ω_1 , indica la velocidad a la que la valvula de admisión está completamente abierta, y ω_2 la velocidad a la que la valvula esta completamente cerrada.

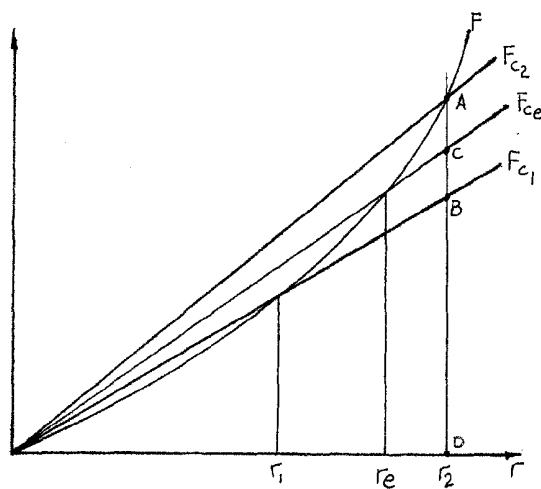


FIGURA 8

3. REDUCCION DEL SISTEMA DINAMICO

A UNA UNICA COORDENADA

Al comenzar este estudio se ha supuesto que la velocidad de giro de un regulador era impuesta arbitrariamente, por lo tanto el regulador tendrá un solo grado de libertad, que será el correspondiente a la apertura de sus brazos.

Como en un regulador, generalmente hay masas móviles en distintas coordenadas (por ejemplo las masas giratorias y el manguito), se intentará obtener un sistema de comportamiento dinámico equivalente ubicado sobre una única coordenada.

3.1 Reducción de una fuerza

En la dirección de la coordenada q_j actúa una fuerza F_j . Se quiere obtener el efecto de F_j sobre la coordenada q_i . Este efecto es una fuerza $F_j(i)$ que actuando en la dirección de la coordenada q_i es equivalente a F_j actuando en q_j .

Por el teorema de los trabajos virtuales

$$F_j \cdot \delta q_j = F_j(i) \cdot \delta q_i$$

δq_j y δq_i son desplazamientos virtuales correspondientes a las coordenadas q_j y q_i .

$$F_{j(i)} = F_j \frac{\delta q_j}{\delta q_i}$$

si $q_j = F(q_i)$ entonces $\frac{\delta q_j}{\delta q_i} = F'$

$$F_{j(i)} = F' F_j$$

3.2 Reducción de una masa

La masa m_j puede moverse en la dirección de la coordenada q_j . Se quiere obtener la masa $m_{j(i)}$ que moviéndose en la dirección de q_i tenga el mismo comportamiento dinámico.

En q_j actúa una fuerza de inercia F_j .

$$F_j = -m_j \ddot{q}_j$$

Si se reduce esta fuerza de inercia a q_i

$$F_{j(i)} = F' F_j$$

El comportamiento dinámico de $m_{j(i)}$ es

$$F_{j(i)} = -m_{j(i)} \ddot{q}_i$$

Reemplazando en esta las ecuaciones anteriores

$$-F' m_j \ddot{q}_j = -m_{j(i)} \ddot{q}_i$$

$$m_{j(i)} = F' \frac{\ddot{q}_j}{\ddot{q}_i} m_j$$

pero

$$q_j = f(q_i)$$

$$\dot{q}_j = f' \dot{q}_i$$

$$\ddot{q}_j = f'' \dot{q}_i^2 + f' \ddot{q}_i$$

Si en el momento considerado $\dot{q}_i = 0$, o la relación entre q_i y q_j es lineal queda:

$$\ddot{q}_j = f' \ddot{q}_i$$

Por lo tanto:

$$m_{j(i)} = (f')^2 m_j$$

3.3 Reducción de una constante elástica

En la coordenada q_j actúa una fuerza elástica $dF_j = -k_j dq_j$. Se quiere hallar la constante de la fuerza elástica equivalente, actuante sobre q_i .

La fuerza elástica en q_j es

$$dF_j = -k_j dq_j$$

Si se reduce esta fuerza a q_i

$$dF_{j(i)} = f' dF_j$$

La fuerza elástica equivalente en q_i será

$$dF_{j(i)} = -k_{j(i)} dq_i$$

Reemplazando en ésta las ecuaciones anteriores

$$-F' k_j dq_j = -k_{j(i)} dq_i$$

$$k_{j(i)} = F' \frac{dq_j}{dq_i}$$

y como $\frac{dq_j}{dq_i} = F'$

$$k_{j(i)} = (F')^2 k_j$$

3.4 Reducción de una constante de amortiguación viscosa

En la coordenada q_j actúa una fuerza de amortiguación $F_j = -c_j \dot{q}_j$. Se quiere obtener la constante del amortiguador equivalente actuante en q_i . En q_j actúa la fuerza de amortiguación

$$F_j = -c_j \dot{q}_j$$

Si se reduce a la coordenada q_i

$$F_{j(i)} = F' F_j$$

El comportamiento dinámico de q_j es

$$F_{j(i)} = -c_{j(i)} \dot{q}_i$$

Reemplazando en ésta, las ecuaciones anteriores

$$-F' c_j \dot{q}_j = -c_{j(i)} \dot{q}_i$$

$$C_j(i) = F' \frac{\dot{q}_j}{\dot{q}_i} C_j$$

Pero $q_j = f(q_i)$
 $\dot{q}_j = F' \dot{q}_i$

entonces

$$C_j(i) = (F')^2 C_j$$

3.5 Reducción de un regulador a una de las masas giratorias

Las masas giratorias, se mueven sobre el plano de referencia, en la dirección de la coordenada Y (Figura 5). El manguito se mueve en la dirección de la coordenada X (Figura 6).

$$x = f(y)$$

$$F' = \frac{dx}{dy}$$

La masa del manguito se repartirá por igual en cada brazo del regulador. Si se reduce la fracción correspondiente a una coordenada Y .

$$M_Y = \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \frac{M}{P}$$

donde

M = masa del manguito

p = número de masas giratorias

M_y = masa reducida de la fracción del manguito correspondiente a la coordenada y .

Esta masa se suma con la que ya actuaba en la coordenada y , y así se obtiene la masa reducida del sistema a la coordenada y . A esa masa se la llamará m' .

$$m' = m + M_y$$

$$m' = m + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \frac{M}{p}$$

Aunque en el sistema no haya resortes, igual puede oscilar, pues al variar su configuración, varían las fuerzas actuantes. Dado que ω es constante F_y y F_c dependerán sólo de y .

La constante elástica estará dada por la variación en la magnitud de las fuerzas que actúan en la dirección y , y por la unidad de desplazamiento en y .

En la dirección de y actúan. (Ver figura 5).

$$\sum F_y = (F_c - F) \cos \varphi + (F_v - mg) \sin \varphi$$

La constante elástica será:

$$k' = - \frac{\Delta \sum F_y}{\Delta y}$$

pero mg no varía con y , y para cualquier configuración, F_v es constante e igual a mg . Además, si Δy es pequeño, se puede suponer $\varphi \approx \text{cte}$

$$k' = - \frac{\Delta(F_c - F)}{\Delta y} \cos \varphi \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial(F - F_c)}{\partial y} \cos \varphi$$

En el caso más general, k' será función de y , pero se lo puede suponer constante a lo largo de pequeños desplazamientos.

Es posible apreciar la importancia de k' en el diagrama de F .

En la figura 9 se ve que:

$$dr = dy \cos \varphi$$

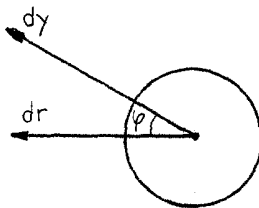


FIGURA 9

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$k' = \frac{\partial(F - F_c)}{\partial r} \cos^2 \varphi$$

Se toman derivadas parciales, porque sólo se consideran variaciones de configuración.

En esta ecuación se ve que para valores similares de φ, k' es mayor, cuanto mayor sea la diferencia entre las pendientes de las curvas de F y de F_c para un dado ω .

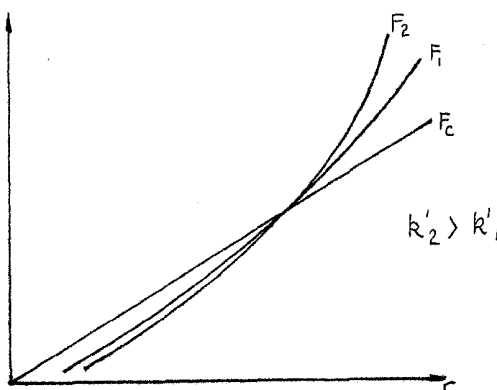


FIGURA 10

3.6 Condición de estabilidad del sistema

Un regulador es estable cuando para una dada velocidad de rotación existe una configuración a la que el sistema tiende naturalmente luego de cualquier perturbación, y ante un cambio en la velocidad de rotación existe una nueva configuración para la cual el regulador es estable.

Esta condición es válida para el regulador desvinculado de la máquina mótriz, pues la interacción entre ellos crea otro tipo de problemas de estabilidad, como por ejemplo, que la excitación debida a la va

ción de velocidad del motor haga entrar en resonancia al regulador.

El regulador tenderá hacia un punto de equilibrio, si al apartarlo de este punto, surgen fuerzas que se oponen a este cambio.

Si se reduce el sistema a la ccordenada r , se podrá usar para el aná lisis la Figura 11.

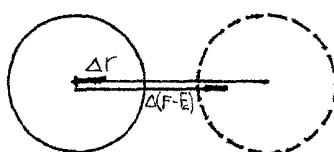


FIGURA 11

En la dirección de la coordenada r actúan F y F_c , por lo tanto un aumento de r , debe ser contrarrestado por un aumento de F respecto de F_c , o sea:

$$\frac{\Delta(F-F_c)}{\Delta r} > 0$$

Si Δr tiende a cero, y ω es constante

$$\frac{\partial(F-F_c)}{\partial r} > 0$$

O sea

$$\frac{\partial F}{\partial r} > \frac{\partial F_c}{\partial r}$$

Pero como $F = F(r)$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{dF}{dr}$$

y a demás

$$F_c = m \omega^2 r$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial r} = m \omega^2 = \frac{F_c}{r}$$

Entonces, como para cada punto de equilibrio $F = F_c$, operando con las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\frac{dF}{dr} > \frac{F}{r}$$

Esto se puede interpretar en el diagrama de F , como que un regulador es estable cuando una recta que pasa por el origen corta a la curva de arriba hacia abajo.

En la Figura 12 se ven tres curvas. La curva F_1 es estable, y se encuentra en equilibrio en el punto A. Si se aprta a la configuración de es te punto, o sea, si se hace Γ distinto de Γ_A , surge una diferencia entre F y F_c que se opone a esta variación.

La curva F_2 es inestable, y si se aprta a Γ de Γ_B , la diferencia de fuerzas tiende a aumentar esta variación. La curva F_3 , coincide con la recta; y ante una variación en la configuración no surgen fuerzas a favor ni en contra.

Un regulador que tenga una curva de F de estas características se llama isócrono o astático. Este tipo de regulador no es estable, porque ante una pequeña variación en la velocidad se desplaza la curva de F_c , y no surgen nuevos puntos de equilibrio.

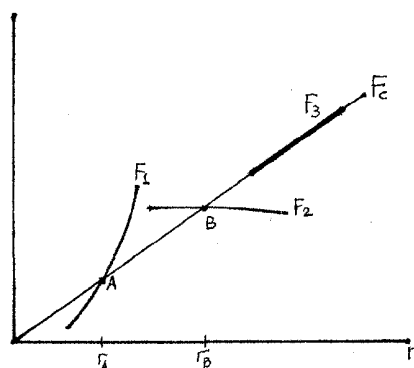


FIGURA 12

3.7 Pulsación natural del sistema

Para pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio en que $F = F_c$, para un ω dado, y si no hay amortiguación, se puede aproximar el sistema a un sistema de masa y resorte en la coordenada y .

$$m'\ddot{y} + k'y = 0$$

si $k' > 0$, la solución de esta ecuación es un movimiento armónico de amplitud constante, y pulsación natural ω_0 .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k'}{m'}}$$

si $k' \leq 0$, la solución de la ecuación es un desplazamiento cada vez mayor que indica que el sistema es inestable.

Este es un valor importantísimo en el análisis de un regulador, pues como se vio al estudiar los sistemas dinámicos de un grado de libertad, indica la velocidad con que va a responder el sistema frente a una perturbación externa. Cuanto mayor sea el valor de ω_0 , más rápido será la respuesta del regulador.

Este valor de ω_0 se obtuvo reduciendo el sistema a la coordenada y , pero como hay un solo grado de libertad, en todas las coordenadas el movimiento tendrá esta pulsación. Por lo tanto, el valor de ω_0 no depende de la coordenada a la que se reduzca el sistema.

3.8 Sensibilidad de un regulador

La sensibilidad de un regulador está dada por el trabajo que efectúa la fuerza de acción ante una variación relativa de la velocidad de rotación. Un regulador será más sensible cuando este trabajo, por unidad de variación de velocidad relativa, sea mayor.

$$S = \frac{P \cdot \Delta x}{\frac{\Delta \omega}{\omega}}$$

Expresando en forma de diferenciales

$$S = \omega P \frac{dx}{d\omega}$$

La sensibilidad varía para las diferentes velocidades de funcionamiento, y la zona de trabajo del regulador debe situarse en donde esta sensibilidad sea máxima.

Un regulador astático tiene sensibilidad infinita, puesto que es capaz de variar su configuración sin necesidad de variar la velocidad.

Para una misma fuerza de acción P , un regulador más sensible experimentará mayores variaciones de configuración que otro menos sensible, para iguales variaciones de la velocidad relativa. Las variaciones de configuración también se pueden visualizar como variaciones en r .

En el diagrama de F de la Figura 13, F_{c_1} , es la recta correspondiente a los valores de fuerza centrífuga con velocidad ω_1 , F_{c_2} corresponde a $\omega_2 > \omega_1$. El punto inicial de equilibrio de dos diferentes reguladores es E_1 . El nuevo punto del regulador A es E_{2A} , si el regulador B es más sensible

su nuevo punto de equilibrio E_{2B} , también se situará sobre F_{C2} , pero en un valor de r mayor que en el caso anterior.

Si se hace este mismo razonamiento para todos los valores intermedios de ω entre ω_1 y ω_2 , se obtendrán las curvas F_A y F_B correspondientes a la fuerza de control de cada uno de los reguladores.

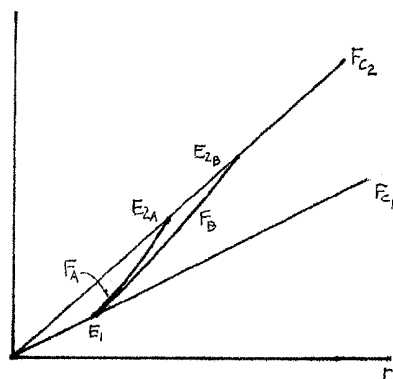


FIGURA 13

Viendo la Figura 13 se deduce que cuanto mas sensible sea un regulador, mas próxima será su curva de F a la curva de F_c correspondiente a su velocidad de giro. En el límite, con sensibilidad infinita, el regulador será estático y la curva de F coincidirá con la de F_c .

El hecho de que ambas curvas se aproximen a medida que aumenta la sensibilidad del regulador, implica que para iguales apartamientos de la configuración de equilibrio, surgirán fuerzas antagónicas menores. Esto

significa que disminuirá el valor de k' , y por lo tanto la velocidad de respuesta del sistema será menor.

Esta aparente antinomia entre sensibilidad y velocidad de respuesta fue solucionada con la introducción de resortes en los reguladores, como se verá más adelante.

Para obtener reguladores de alta sensibilidad, se trata de que en su diagrama de F aparezca por lo menos un punto astático.

Hay tres tipos de puntos astáticos, que pueden verse en la Figura 14.

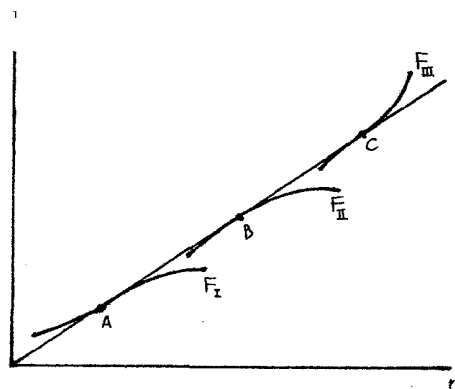


FIGURA 14

Un punto como el A , tiene a su derecha e izquierda zonas de inestabilidad, por lo tanto no es útil.

Un punto como el B , tiene a su derecha una zona inestable, y a su izquierda una zona estable, y esta curva será útil en la zona estable,

y el regulador sera más sensible cuanto más cerca este de B.

El punto C está rodeado por dos zonas de estabilidad, y toda la curva es aprovechable. El punto de equilibrio puede ser el punto estático.

3.9 Relaciones cinemáticas

Para hallar las magnitudes reducidas a la coordenada y es necesario obtener $\frac{dx}{dy}$.

El método consiste en ubicar el centro instantáneo de rotación de la varilla que contenga la masa del manguito y se vincule con la que la sostiene la masa giratoria.

Como el manguito se mueve sobre el eje, su polo de rotación estará sobre una recta perpendicular al eje (Recta I-I).

La articulación II se mueve con polo en la recta I-II, Por lo tanto el centro instantáneo de rotación estará en la intersección de las rectas I-I y I-II, o sea en el punto C.

En un pequeño movimiento, la varilla II-III girará alrededor de C, y se verificará

$$\frac{\Delta x}{C} = \frac{\Delta y_{II}}{a}$$

$$\Delta x = \frac{C}{a} \Delta y_{II}$$

Como la varilla I-II tiene polo en I

$$\frac{\Delta y_{II}}{b} = \frac{\Delta y}{l}$$

Finalmente

$$\Delta x = \frac{c \cdot b}{a \cdot l} \Delta y$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{b \cdot c}{a \cdot l}$$

en el límite

$$\frac{dx}{dy} = \frac{bc}{al}$$

En esta ecuación se ve $\frac{dx}{dy}$ es mayor cuanto mayor sea $\frac{b}{l}$, y mayor sea $\frac{c}{a}$, por lo tanto, la masa del manguito reducida a la coordenada y será mayor en este caso, pero también serán mayores las influencias de las fuerzas.

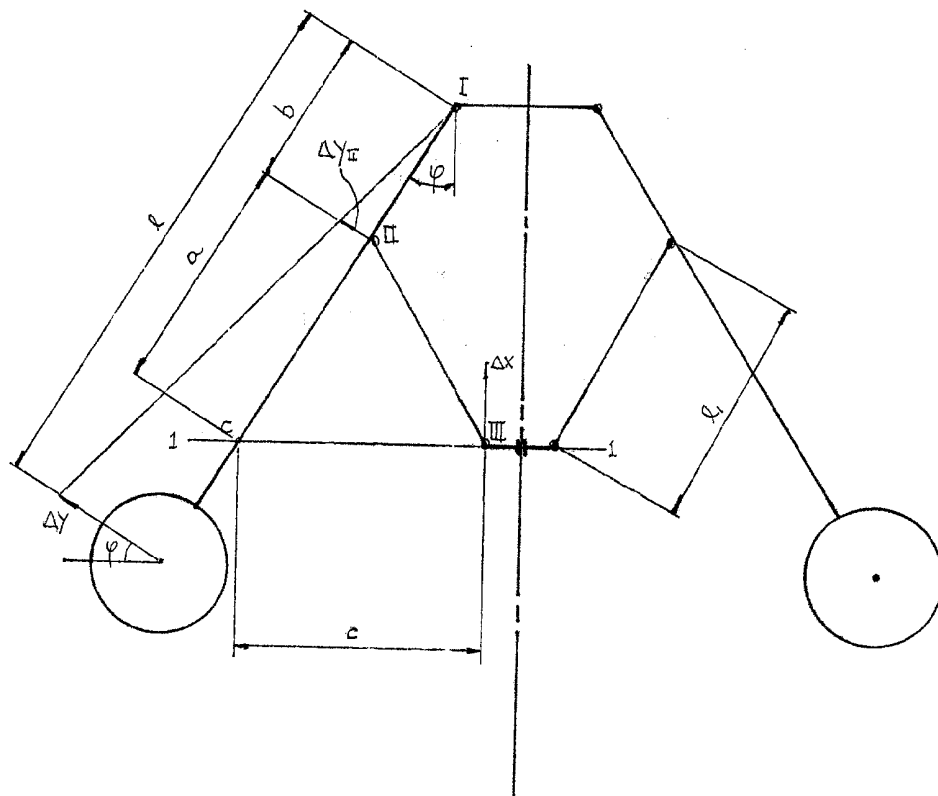


FIGURA 15

4. EFECTOS DE LA FRICCIÓN DE COULOMB

Debido a los efectos de la fricción, el regulador no variará su configuración hasta que los efectos de la fuerza centrífuga superen los efectos de las fuerzas de fricción estáticas.

Estas fuerzas de fricción pueden provenir del rozamiento propio del regulador, y del rozamientos del sistema regulado.

4.1 Grado de insensibilidad

Si un regulador sin fricción en su configuración de equilibrio gira con velocidad angular ω_e , al tener en cuenta la fricción, el regulador no abrirá sus brazos hasta no llegar a ω'' , en que los efectos de la fuerza centrífuga superan los efectos de la fricción. Por la misma causa, no cerrará sus brazos hasta no llegar a ω' .

Se define como grado de insensibilidad \mathcal{E} .

$$\mathcal{E} = \frac{\omega'' - \omega'}{\omega_e}$$

Si se aproxima

$$\omega_e \approx \frac{\omega'' + \omega'}{2}$$

Y se multiplica y divide la definición de \mathcal{E} por $m.r.$.

$$\epsilon = \frac{F_c'' - F_c'}{2F_{ce}}$$

Llamando $F_c'' = m r \omega''^2$

$$F_c' = m r \omega'^2$$

$$F_{ce} = m r \omega_e^2$$

Estas son las fuerzas centrífugas que experimenta la masa giratoria en el momento de abrir o cerrar los brazos y en el equilibrio respectivamente. Entre ω' y ω'' el radio no varía, pues entre esas velocidades el regulador es insensible.

Cada una de estas fuerzas centrífugas es equilibrada por la fuerza de control correspondiente, y se puede aproximar:

$$F_c'' = F'' \simeq F_e + F_R$$

$$F_c' = F' \simeq F_e - F_R$$

Donde F_R es el efecto de las fuerzas de fricción sobre las masas giratorias, y F_e es la fuerza de control que experimentarían las masas centrífugas girando a ω_e , y sin que existiese fricción.

$$\epsilon = \frac{F_R}{F_e}$$

Si se considera que los efectos de la fricción están reducidos sobre el manguito, sobre el actuarán las fuerzas del punto 2.6.

La reducción de F_R al manguito será $\frac{P_R}{P} = \frac{P_r + P_s}{P}$.

La reducción de F_e será $\frac{P}{p}$, don p es el número de masas centrífugas.

$$\varepsilon = \frac{P_R}{P}$$

4.2. Grado de irregularidad total

Si en un regulador sin fricción el grado de irregularidad era δ .

$$\delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_e}$$

Teniendo en cuenta la fricción será

$$\delta_T = \frac{\omega_2'' - \omega_1'}{\omega_e}$$

Si se supone ε constante, se puede aproximar

$$\omega_2'' - \omega_2 \approx \frac{\varepsilon}{2} \omega_2$$

$$\omega_1 - \omega_1' \approx \frac{\varepsilon}{2} \omega_1$$

$$\delta_T = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_e} + \varepsilon \frac{\omega_2 + \omega_1}{2 \omega_e} = \delta + \varepsilon$$

$$\delta_T = \delta + \varepsilon$$

5. ANALISIS DE DIFERENTES REGULADORES

En un regulador de velocidad, lo que se busca es lograr una velocidad constante, o sea, conseguir el menor grado de irregularidad total.

El grado de irregularidad sin tener en cuenta la fricción tiene un valor ideal, y un valor mínimo calculados por Tolle (ref.1) teniendo en cuenta la interacción entre el motor y el regulador. Estos valores de δ son menores cuanto más rápida sea la respuesta del sistema, es decir cuanto mayor sea ω_0 , y cuanto mayor sea la inercia del volante del motor.

El grado de insensibilidad debe ser llevado al menor valor posible pero ese valor debe ser mayor que el grado de irregularidad del volante, para evitar que el regulador actúe permanentemente, desgastándose y perdiendo precisión. En este caso también es beneficioso un volante con gran inercia.

5.1 Reguladores de Pesos

5.1.1 Modelo general:

Para el estudio de los reguladores de Watt, Porter y Kley, es posible partir de un modelo simplificado general, en el que se consideren diferentes casos particulares.

El modelo es el que se indica en la Figura 16.

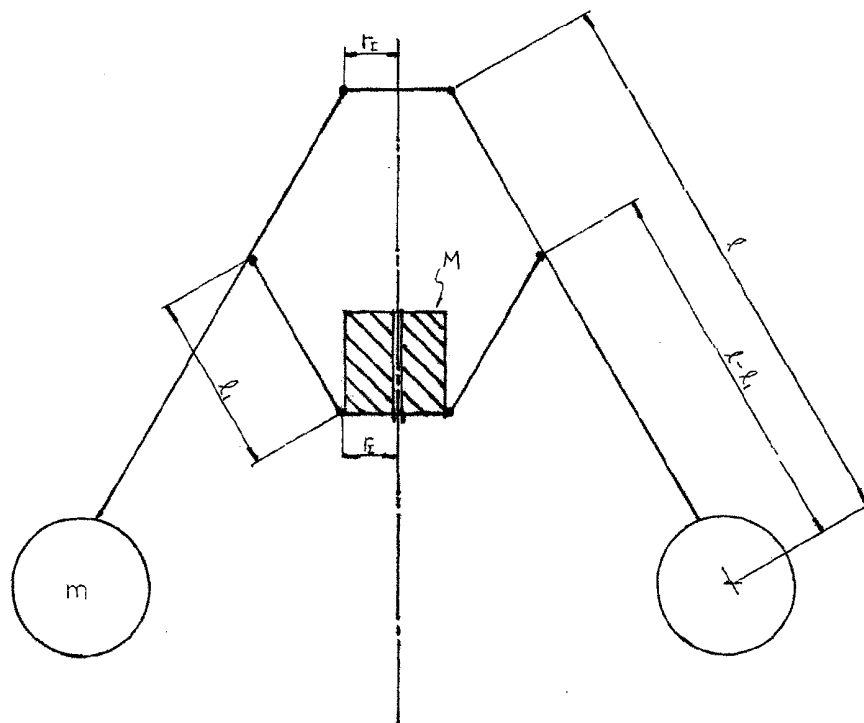


FIGURA 16

Las diferentes variantes surgirán fijando los valores de F , l , l_1 , m , y M .

Este es un modelo simplificado, pues se está considerando que la distancia del gorrón III al eje es la misma que la del gorrón I, y que la longitud de la varilla II-III es igual a la distancia I II.

$$\Delta \varphi_1 = \frac{\Delta \gamma_{II}}{a}$$

$$\Delta \gamma_{II} = b \Delta \varphi$$

entonces:

$$\Delta x = \frac{bc}{a} \Delta \varphi$$

En un modelo simplificado, las distancias correspondientes serán a', b', c' , y se cumple que $a' = b'$, por lo tanto:

$$\Delta x = c' \Delta \varphi$$

esto significa

$$c' = \frac{bc}{a}$$

además

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{a+b} = \frac{c'}{a'+b'} = \frac{c'}{2b'} = \frac{bc}{2ab'}$$

o sea

$$\frac{1}{a+b} = \frac{b}{2ab'}$$

$$b' = b \frac{a+b}{2a}$$

$$b' = b \frac{1 + b/a}{2}$$

También si se tiene un regulador con la varilla II-III igual a la distancia I-II, pero la distancia de los gorriones varía levemente, se puede aproximar un r_I equivalente.

Un análisis de la curva de F de un regulador con r_I distinto de r_{III} muestra que F está compuesto por dos curvas, una que depende de φ y otra de φ_1 y pasan por cero en r_I y r_{III} respectivamente.

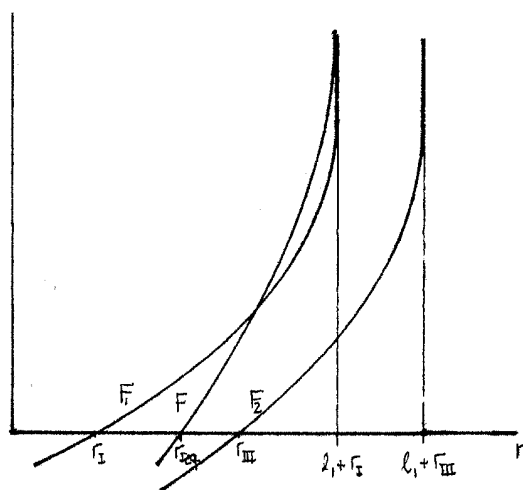


FIGURA 18

$$F_1 = \left(m + \frac{M}{2}\right) g \operatorname{tg} \varphi$$

$$F_2 = \frac{M}{2} g \operatorname{tg} \varphi_1$$

Al sumar estas curvas, la curva resultante se anulará aproximada mente en

$$\Gamma_{Ieq} = \frac{\left(m + \frac{M}{2}\right) \Gamma_I + \frac{M}{2} \Gamma_{III}}{m + M}$$

Este será el Γ_I que se usará en el modelo simplificado. Esta aproximación no es válida para valores de ℓ cercanos a 90° , pues en esa zona las curvas F_1 y F_2 tienen comportamientos muy diferentes.

5.2.2. Regulador de Watt

Es el primer regulador. Fue inventado por Watt en 1788, y no lleva resortes ni amortiguadores, ni carga en el manguito. En la figura 19 se ve una replica del primer regulador constituido por Watt, que se conserva en el Museo Smithsoniano.

El modelo general represente al regulador de Watt cuando $M=0$, y por lo general, Γ_I también es nulo.

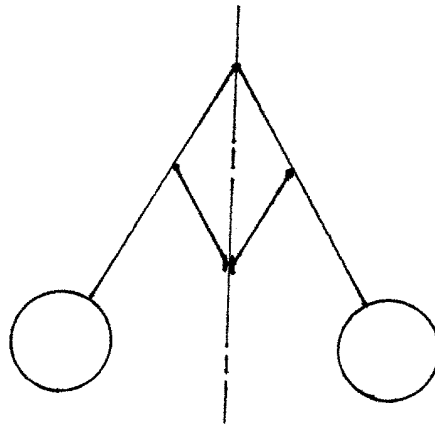


FIGURA 20

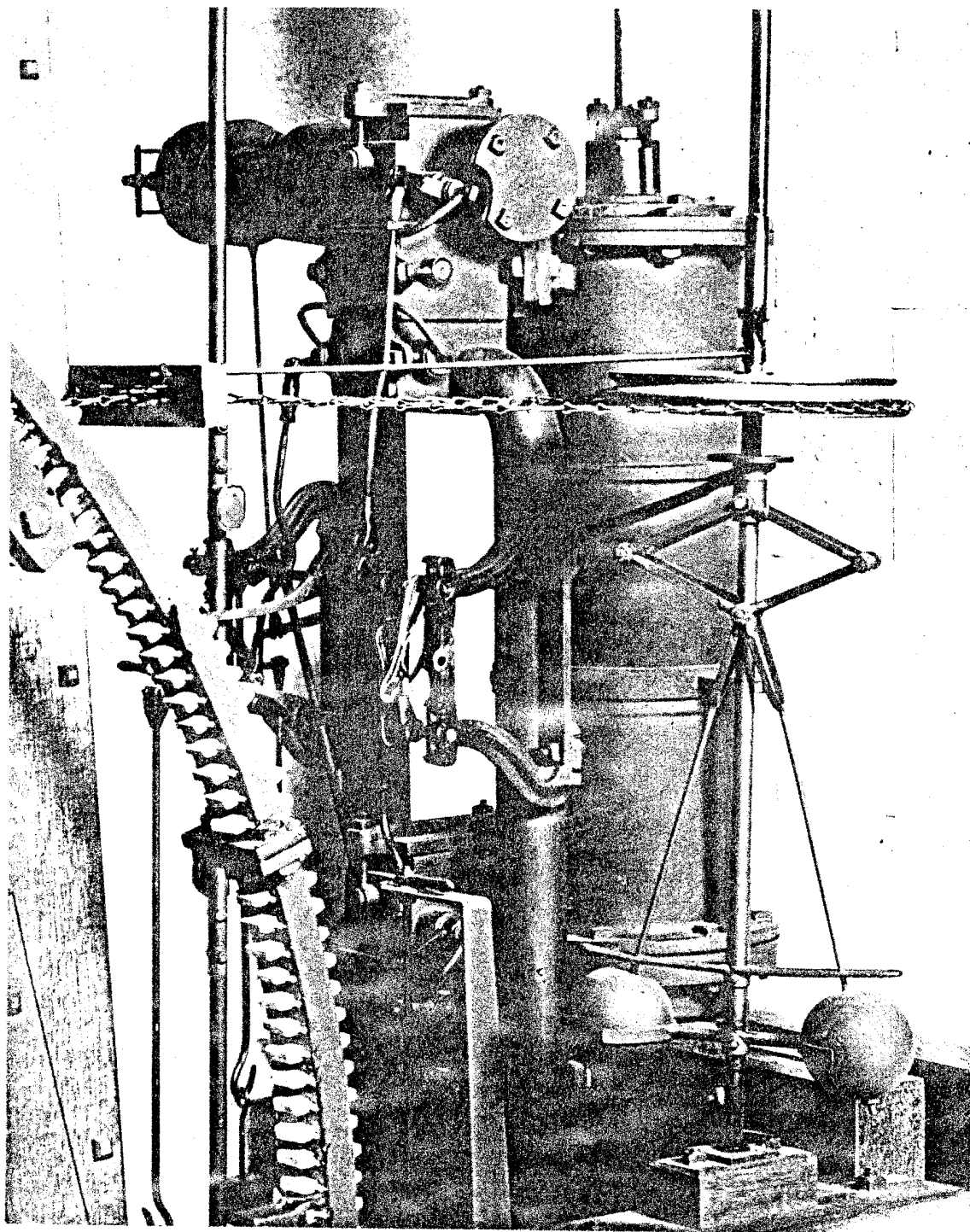


FIGURA 19

5.1.2.1 Fuerza de control:

Los momentos respecto del punto I de la fuerza centrífuga y del peso de la masa giratoria deben equilibrarse.

$$F_c \cdot d = m \cdot g \cdot e$$

$$F_c = \frac{e}{d} m g = m g \operatorname{tg} \varphi$$

en el equilibrio:

$$F_c = F$$

entonces:

$$F = m g \operatorname{tg} \varphi$$

en el caso más general con $r_s \neq 0$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r - r_s}{\sqrt{\ell^2 - (r - r_s)^2}}$$

$$F = m g \frac{r - r_s}{\sqrt{\ell^2 - (r - r_s)^2}}$$

La curva de F será como la de la Figura 21.

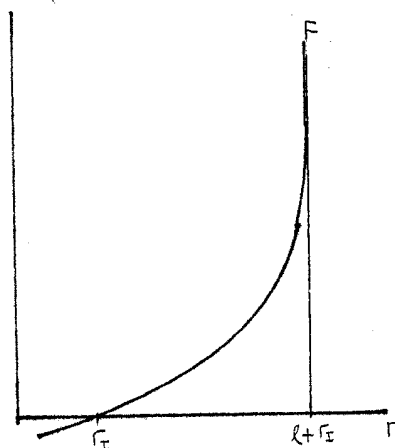


FIGURA 21

5.1.2.2 Fuerza de acción:

Resulta de reducir el peso de las masas giratorias al manguito.

$$P = p \, m g \frac{dh}{dx}$$

donde p = número de masas centrífugas ("bolas").

h = altura de las bolas

x = recorrido del manguito

Si h y x son nulos cuando el regulador está cerrado, en el modelo general será.

$$h = l (1 - \cos \varphi)$$

$$x = 2l (1 - \cos \varphi)$$

entonces: $dh = l \sin \varphi \, d\varphi$
 $dx = 2l_1 \sin \varphi \, d\varphi$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{l}{2l_1}$$

$$P = p \, mg \, \frac{l}{2l_1}$$

De aquí en más se supondrá que el regulador tiene dos bolas.

$$P = mg \, \frac{l}{l_1}$$

Se observa en la ecuación anterior que P es constante. En un modelo sin las simplificaciones del modelo general, P variará levemente.

Si se considera un regulador como el de la Figura 22.

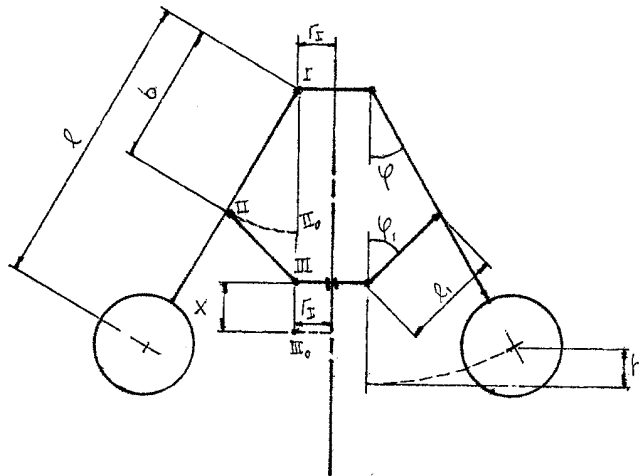


FIGURA 22

$$h = l(1 - \cos \varphi)$$

$$x = b(1 - \cos \varphi) + l_1(1 - \cos \varphi_1)$$

por el teorema del seno:

$$\frac{\sin \varphi}{l_1} = \frac{\sin \varphi_1}{b}$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{b}{l_1} \sin \varphi$$

$$\cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{l_1}\right)^2 \sin^2 \varphi}$$

$$x = b(1 - \cos \varphi) + l_1 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{b}{l_1}\right)^2 \sin^2 \varphi}\right)$$

$$dx = b \sin \varphi \left(1 - \frac{b}{l_1} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{l_1}\right)^2 \sin^2 \varphi}}\right) d\varphi$$

$$dh = l \sin \varphi d\varphi$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{l}{b} \frac{1}{1 + \frac{b}{l_1} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{l_1}\right)^2 \sin^2 \varphi}}}$$

entonces P será:

$$P = mg \frac{2}{1 + \frac{b}{\ell_1} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{\ell_1}\right)^2 \sin^2 \varphi}}}$$

En la figura se grafican las curvas de P en función de φ para diferentes valores de la relación $\frac{b}{\ell_1}$.

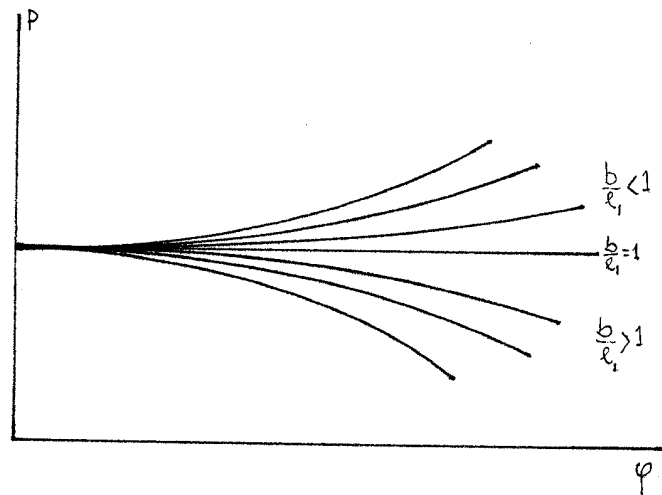


FIGURA 23

Se observa que para $\frac{b}{\ell_1} = 1$, que es el caso del modelo general, P es constante, si $\frac{b}{\ell_1} < 1$, P crece con el ángulo φ , y decrece si $\frac{b}{\ell_1} > 1$.

5.1.2.3. Sensibilidad:

La sensibilidad en un punto de funcionamiento de un regulador está definida como:

$$S = \omega P \frac{dx}{d\omega}$$

En el caso del regulador de Watt, por no tener carga en el manguito:

$$P dx = 2mg dh$$

entonces la sensibilidad será:

$$S = 2w mg \frac{dh}{dw}$$

La altura h sólo depende del largo de la varilla que sostiene a la bola y de la velocidad de giro. Por lo tanto para una misma longitud y una misma velocidad de rotación, la sensibilidad S será la misma, independientemente de la posición de la varilla. II-III.

Más adelante se verá la forma en que ζ afecta a la sensibilidad.

5.1.2.4 Masa reducida:

Dado que las únicas masas actuantes se encuentran la coordenada γ , la masa reducida será constante e igual a la masa de una bola.

5.1.3 Regulador de Porter:

Este regulador fue inventado intuitivamente por Porter en 1858 e introduce la primera modificación al regulador clásico de Watt, que había permanecido inalterado por unos 50 años.

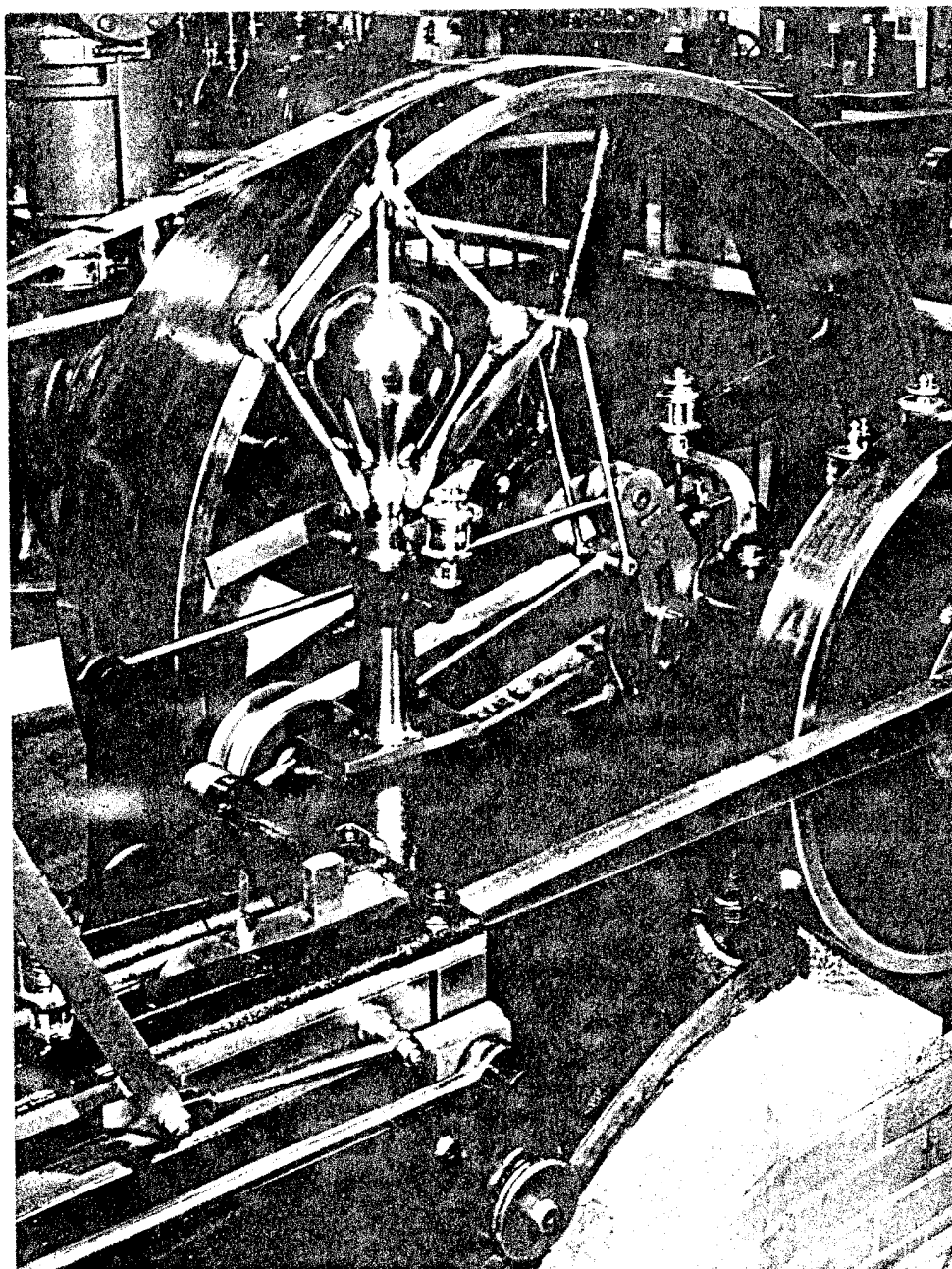


FIGURA 24

En la Figura 24 se ve uno de estos reguladores montado sobre un motor de vapor rápido de 1881.

La innovación consiste en colocar un gran peso sobre el manguito. Este peso origina casi toda la fuerza de control, y así las bolas pueden ser más livianas.

La fuerza centrífuga necesaria para equilibrar esta fuerza de control es debida a la rotación aproximadamente diez veces más rápida de las bolas.

El modelo general representa al regulador de Porter cuando $l=l_1, M \neq 0$.

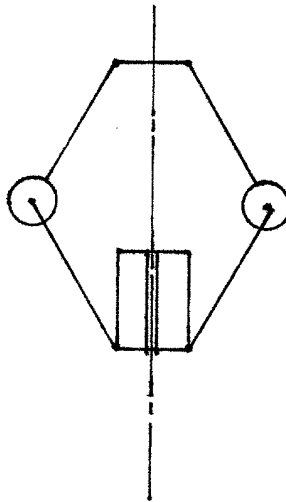


FIGURA 25

5.1.3.1 Fuerza de Control:

La fuerza de control tiene dos componentes: una debida al peso de las bolas (F_b) y otra debida al peso del manguito (F_m).

$$F = F_m + F_M$$

La componente F_m tiene las mismas características que la curva de F de un regulador de Watt, pues si no se considera el peso sobre el manguito, el regulador de Porter se convierte en uno de Watt.

$$F_m = mg \operatorname{tg} \varphi$$

$$F_m = mg \frac{r - r_I}{\sqrt{l_1^2 - (r - r_I)^2}}$$

Para obtener la componente F_M , se toman momentos respecto al centro instantáneo de rotación de la varilla II-III (Punto A).

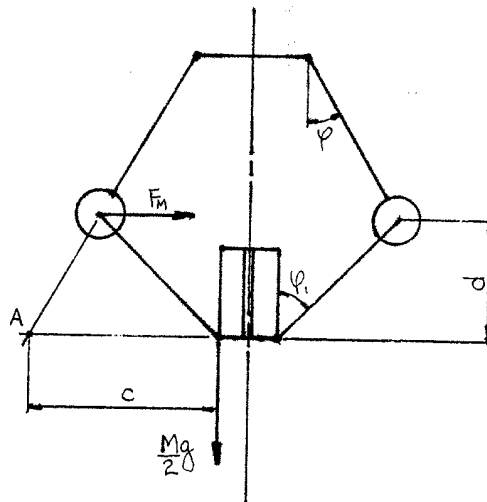


FIGURA 26

$$\frac{Mg}{2} \cdot c = F_m \cdot d$$

$$F_m = \frac{Mg}{2} \cdot \frac{c}{d}$$

pero

$$c = d(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi_1)$$

$$F_m = \frac{Mg}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi_1)$$

Se ve en esta ecuación que F_m a su vez tiene dos componentes: una varía de igual manera que F_m , o sea es función de φ . La otra varía en función de φ_1 .

Finalmente:

$$F = \left(m + \frac{M}{2}\right) g \operatorname{tg} \varphi + \frac{Mg}{2} \operatorname{tg} \varphi_1$$

en el caso del modelo general, $\varphi = \varphi_1$, y queda

$$F_m = Mg \operatorname{tg} \varphi$$

$$F = (m + M) g \operatorname{tg} \varphi$$

La curva de F tendrá una variación similar a la de un regulador de Watt.

5.1.3.2 Fuerza de Acción:

También tiene dos componentes, una debido al peso de las bolas y otra debido al peso sobre el manguito.

$$P = P_m + P_M$$

Nuevamente P_m es similar al P de Watt, en cambio P_M es el peso mismo que actúa sobre el manguito.

Como la masa sobre el manguito es mucho mayor que la masa de las bolas, P_M será predominante, y como tiene un valor constante, hará que P sea más uniforme en los casos en que P_m no se mantenga constante.

5.1.3.3 Sensibilidad:

Si P es constante, la sensibilidad es similar a la de un regulador de Watt.

5.1.3.4 Masa reducida:

Este es punto principal de un un regulador de Porter, pues su masa reducida es mucho menor que la masa reducida de un regulador de Watt equivalente. Esto significa que la respuesta de un regulador de Porter es mucho más rápida que la de uno de Watt. Esta ventaja del regulador de Porter hizo caer en desuso a los reguladores de Watt.

5.1.4 Regulador de Kley

Es un modelo perfeccionado del regulador de Porter y puede llevar peso sobre el manguito o no. Se caracteriza por su alta sensibilidad y velocidad de respuesta.

El modelo general representa al regulador de Kley cuando ζ_1 es negativo, o sea cuando el gorrón se sitúa del lado opuesto al de la masa que sostiene

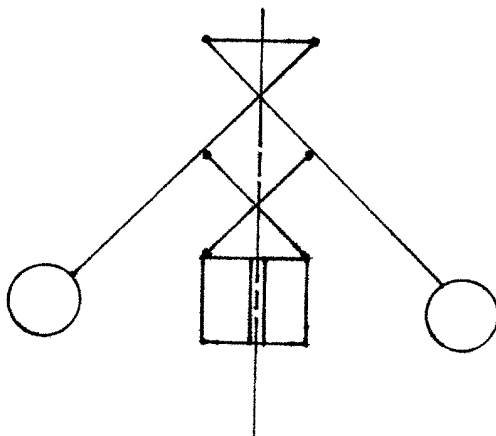


FIGURA 27

5.1.4.1 Fuerza de control:

La curva de F será igual a la de un regulador de Porter, pero como ζ_1 es negativo, la curva se desplazará hacia la izquierda.

$$F = (m+M)g \tan \varphi$$

pero
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r - |\Gamma_1|}{\sqrt{l^2 - (r - |\Gamma_1|)^2}}$$

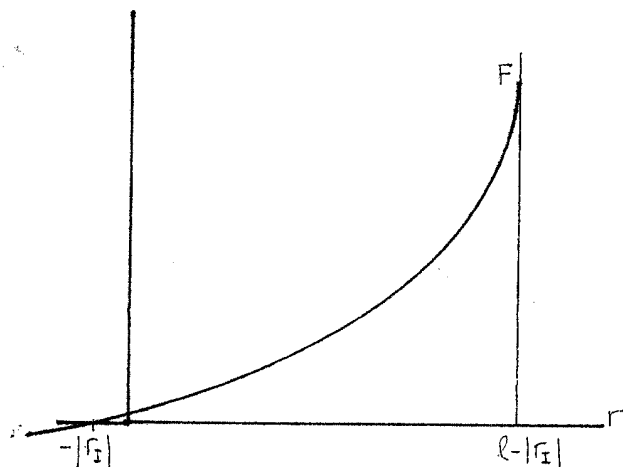


FIGURA 28

5.1.4.2 Fuerza de acción:

Es la misma de un regulador de Porter de igual configuración y distinto Γ_1 , pues esta fuerza no depende de Γ_1 .

5.4.3 Sensibilidad:

Este es el punto principal de un regulador de Kley, pues su curva F presenta un punto astático, que le da gran sensibilidad al regulador. Esta sensibilidad no puede ser alcanzada por reguladores de Watt o de Porter.

En la Figura 29 se ve que el punto astático A divide a la curva de F en dos partes. Si $r < r_A$ el regulador es inestable, y es estable cuando $r > r_A$.

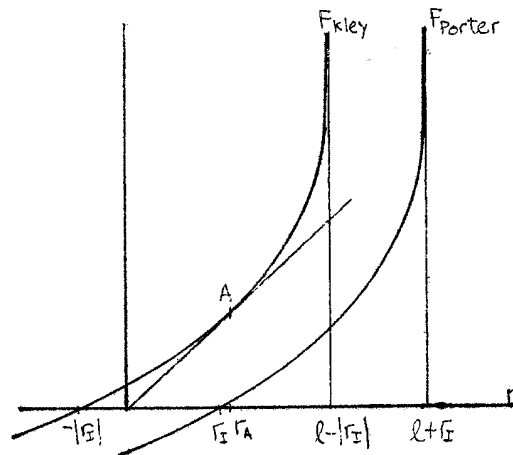


FIGURA 29

Cuando se estudien los efectos de \bar{r}_1 sobre la sensibilidad, se calculará la ubicación de este punto estático.

5.1.4.3 Masa reducida:

La masa reducida se calcula de igual fuerza que un regulador de Porter. Sin embargo, en la Figura 29, se ve que un regulador de Kley, con iguales masas y similar configuración que uno de Porter (excepto por \bar{r}_1), tiene su curva de F siempre por encima de este último. Esto significa que para lograr iguales fuerzas de control, y por lo tanto de acción, pueden utilizarse masas menores, con lo que la velocidad de respuesta del sistema se verá incrementada, compensando en parte la lentitud que corresponde a una alta sensibilidad.

$$F_m = mg \frac{c}{d} = mg \operatorname{tg} \varphi$$

$$\frac{Mg}{2} a = F_m d$$

$$F_m = \frac{Mg}{2} \frac{a}{d} = \frac{Mg}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi_1)$$

$$F = mg \operatorname{tg} \varphi + \frac{Mg}{2} (\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi)$$

El regulador de Proell, para pequeños movimientos puede ser reemplazado por un regulador equivalente como el de la Figura 31, suponiendo al punto A como un punto fijo.

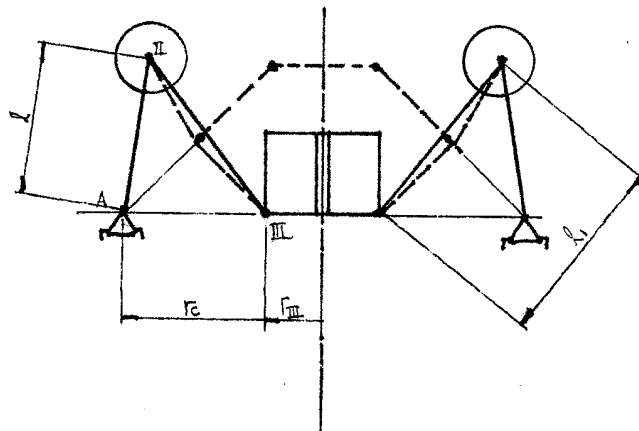


FIGURA 31

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\Gamma - \Gamma_c}{\sqrt{l^2 - (\Gamma - \Gamma_c)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\Gamma - \Gamma_{III}}{\sqrt{l_1^2 - (\Gamma - \Gamma_{III})^2}}$$

$$F_m = -mg \frac{\Gamma - \Gamma_c}{\sqrt{l^2 - (\Gamma - \Gamma_c)^2}}$$

$$F_M = Mg \left(\frac{\Gamma - \Gamma_{III}}{\sqrt{l^2 - (\Gamma - \Gamma_{III})^2}} - \frac{\Gamma - \Gamma_c}{\sqrt{l_1^2 - (\Gamma - \Gamma_c)^2}} \right)$$

La curva de F_m es como la de un regulador de Watt, pero invertida, y por lo tanto inestable.

La curva de F_M es similar a la de un regulador de Porter y es estable. En la Figura 32 se ven ambas curvas. En línea punteada está la parte en que la aproximación no es correcta.

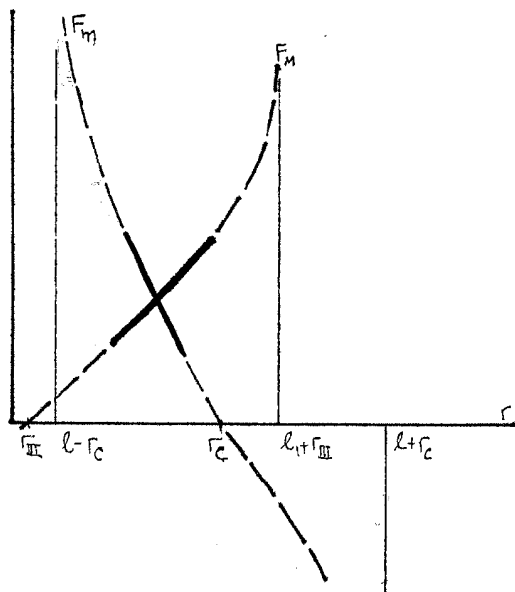


FIGURA 32

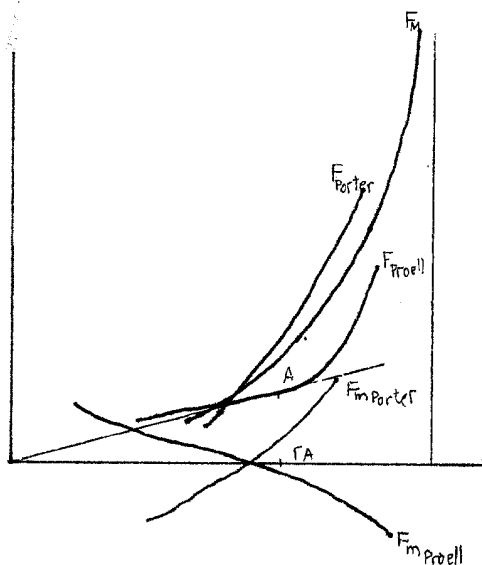


FIGURA 33

5.1.5.3 Análisis:

La inestabilidad de F_m aumenta la sensibilidad del regulador, y hace que a pequeños radios la curva de F de Proell esté por encima de la de un regulador común con valores similares de F_m y F_n , como se ve en la Figura 33.

Para lograr iguales valores de δ , pueden disminuirse las masas, con lo que aumenta la velocidad de respuesta del sistema.

El regulador de Prell, al igual que en el de Kley, existe un punto de astatismo, que es el que le otorga gran sensibilidad.

5.1.6 Cálculo de los parámetros principales del modelo general:

5.1.6.1 Parámetros que definen características estáticas:

De la Figura 16 se deduce que:

$$r = r_I + l \sin \varphi$$

$$x = 2 l_1 (1 - \cos \varphi)$$

Para hallar F :

$$F = F_m + F_M$$

F_m es igual a la de Watt

$$F_m = mg \operatorname{tg} \varphi$$

Para F_M :

$$F_M = \frac{Mg}{2} \frac{dx}{dr}$$

$$dx = 2 l_1 \sin \varphi d\varphi$$

$$dr = l \cos \varphi d\varphi$$

$$\frac{dx}{dr} = 2 \frac{l_1}{l} \operatorname{tg} \varphi$$

entonces:

$$F_M = \frac{Mg}{2} 2 \frac{l_1}{l} \operatorname{tg} \varphi$$

$$F_M = Mg \frac{l_1}{l} \tan \varphi$$

Finalmente:

$$F = \left(m + M \frac{l_1}{l}\right) g \tan \varphi$$

la fuerza de acción P:

$$P = P_m + P_M$$

$$P_M = Mg$$

para hallar P_m :

$$P_m = 2mg \frac{dh}{dx}$$

donde Δh es la variación de altura de las bolas si se define

$$h = l(1 - \cos \varphi)$$

$$dh = l \sin \varphi d\varphi$$

$$dx = 2l \sin \varphi d\varphi$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{l}{2l_1}$$

$$P_m = 2mg \frac{l}{2l_1}$$

$$P_m = mg \frac{l}{l_1}$$

Finalmente:

$$P = \left(M + m \frac{l}{l_1} \right) g$$

Aquí se ve que en este caso particular, la fuerza de acción es constante.

En un punto de equilibrio:

$$F_c = F$$

$$m\omega^2 r = F$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{mr}}$$

tanto F como r se calculan a partir de p .

5.1.6.2 Parámetros que definen características dinámicas:

$$m' = m + \frac{M}{2} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2$$

$$dx = 2 l_1 \sin \varphi \, d\varphi$$

$$dy = l \, d\varphi$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2 l_1}{l} \sin \varphi$$

$$m' = m + 2 M \left(\frac{l_1}{l} \sin \varphi \right)^2$$

basandome en lo visto anteriormente:

$$k' = \frac{\partial (F - F_c)}{\partial r} \cos^2 \varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{dF}{dr}$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial r} = \frac{F}{r}$$

$$dF = \left(m + M \frac{l_1}{l} \right) g \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$dr = l \cos \varphi \quad d\varphi$$

$$\frac{dF}{dr} = \left(m + M \frac{l_1}{l}\right) \frac{g}{l} \frac{1}{\cos^3 \varphi}$$

$$k' = \left(m + M \frac{l_1}{l}\right) \frac{g}{l} \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{F}{r} \cos^2 \varphi$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k'}{m'}}$$

La sensibilidad está definida como:

$$S = \frac{P \cdot dx}{\frac{dw}{w}}$$

$$\omega^2 = \frac{F}{mr}$$

$$2 \omega d\omega = \frac{dF}{mr} - \frac{F}{mr^2} dr$$

$$dF = \left(m + M \frac{l_1}{l}\right) g \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{F}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi$$

$$dr = l \cos \varphi d\varphi$$

$$2WdW = \frac{F}{mr} d\varphi \left(\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{l \cos \varphi}{r_I + l \sin \varphi} \right)$$

$$\frac{dW}{W} = \frac{1}{2} \frac{F}{m \omega^2 r} \left(\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{l \cos \varphi}{r_I + l \sin \varphi} \right) d\varphi$$

pero: $m \omega^2 r = F_c = F$

entonces:

$$\frac{dW}{W} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{l \cos \varphi}{r_I + l \sin \varphi} \right) d\varphi$$

$$dx = 2 l_1 \sin \varphi d\varphi$$

$$S = \frac{P \cdot 2 l_1 \sin \varphi}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{l \cos \varphi}{r_I + l \sin \varphi} \right) \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{l \cos \varphi}{r_I + l \sin \varphi}} = \frac{4 P l_1 \sin \varphi}{\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{l \cos \varphi}{r_I + l \sin \varphi}}$$

operando:

$$\frac{\text{sen } \varphi}{\frac{1}{\text{sen } \varphi \cos \varphi} - \frac{l \cos \varphi}{r_I + l \text{sen } \varphi}} =$$

$$= \frac{\text{sen } \varphi}{\frac{r_I + l \text{sen } \varphi - l \cos^2 \varphi \text{sen } \varphi}{r_I \text{sen } \varphi \cos \varphi + l \text{sen}^2 \varphi \cos \varphi}} =$$

$$= \frac{r_I \text{sen}^2 \varphi \cos \varphi + l \text{sen}^3 \varphi \cos \varphi}{r_I + l \text{sen } \varphi (1 - \cos^2 \varphi)} =$$

$$= \frac{\frac{r_I}{\text{sen}^2 \varphi} \cos \varphi + l \text{sen } \varphi \cos \varphi}{\frac{r_I}{\text{sen}^2 \varphi} + l \text{sen } \varphi} =$$

$$= \frac{\frac{r_I}{l} \cos \varphi + \cos \varphi \text{sen } \varphi}{\frac{r_I}{l} \frac{1}{\text{sen}^2 \varphi} + \text{sen } \varphi}$$

finalmente:

$$S = 4 P l_1 \frac{\frac{r_I}{l} \cos \varphi + \cos \varphi \text{sen } \varphi}{\frac{r_I}{l} \frac{1}{\text{sen}^2 \varphi} + \text{sen } \varphi}$$

Si $\frac{l_1}{l} \ll \sin \varphi$, la fórmula se puede aproximar

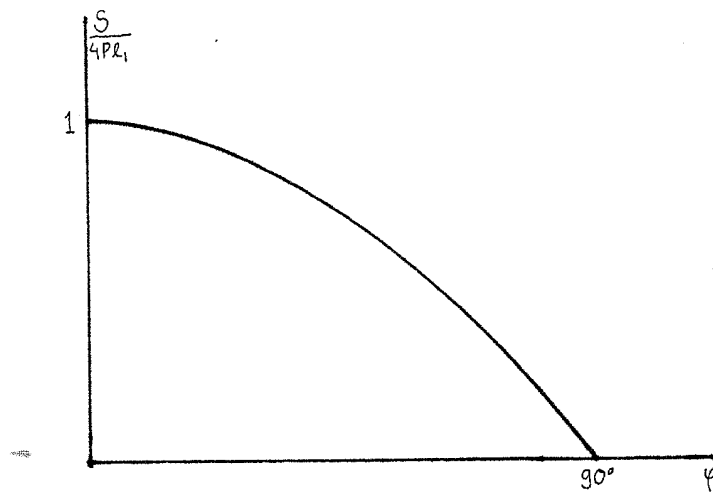
$$S = 4Pl_1 \frac{\cos \varphi}{1 + \frac{l_1}{l} \frac{1}{\sin^3 \varphi}}$$

5.1.6.3 Efecto de l_1 sobre la sensibilidad:

El parámetro l_1 define la distancia del perno I al eje de rotación del regulador. Se considera $l_1 > 0$ si el perno y la masa que pende de él están a un mismo lado del eje, y será negativo en caso contrario.

Si $l_1 = 0$, la sensibilidad del regulador en función del ángulo de apertura es:

$$S = 4Pl_1 \cos \varphi$$



El regulador es estable en todas las posiciones y presenta su máxima sensibilidad en $\varphi=0$.

En esta posición ω es mínimo pero no nulo:

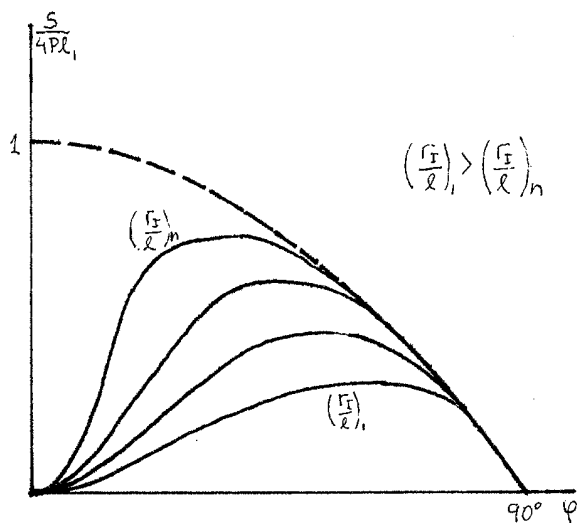
$$F = \left(m + M \frac{l_1}{l}\right) g \tan \varphi$$

$$\Gamma = l \sin \varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{m\Gamma}} = \sqrt{\left(1 + \frac{M}{m} \frac{l_1}{l}\right) \frac{g}{l}} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}}$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\left(1 + \frac{M}{m} \frac{l_1}{l}\right) \frac{g}{l}}$$

Si $\Gamma_1 > 0$ las curvas de sensibilidad serán las siguientes:

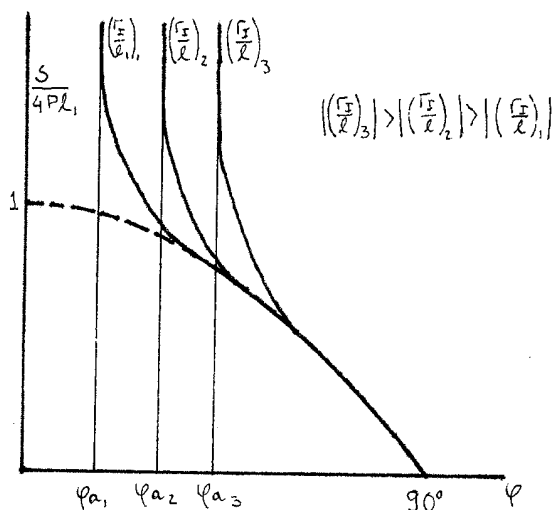


En estas curvas se observa que la sensibilidad presenta un máximo, y este máximo ocurre a menores valores de φ a medida que disminuye r_I .

También se observa que S es siempre cero para $\varphi=0$, y presenta un salto tanto mas brusco cuanto más pequeña sea la relación $\frac{r_I}{l}$.

El regulador es estable en todo su rango de funcionamiento, y ahora la velocidad de rotación mínima correspondiente a $\varphi=0$ es $\omega=0$.

Si $r_I < 0$:



Aquí se ve que para un determinado ángulo la sensibilidad es infinita, o sea el regulador presenta un punto astático. Para ángulos y velocidades de rotación menores a las correspondientes a ese punto el regulador es inestable.

El punto astático se presenta cuando el denominador de la fórmula de S se anula.

o sea cuando:
$$\frac{r_I}{l} \frac{1}{\sin^2 \varphi_0} + \sin \varphi_0 = 0$$

$$\sin \varphi_0 = -\sqrt[3]{\frac{r_I}{l}}$$

5.2 Reguladores de resortes

Desplazaron a los reguladores de pesos por poseer varios ventajas sobre ellos.

Con un regulador de resortes es posible lograr muy altas sensibilidades y fuerzas de control con pequeñas masas reducidas, consiguiendo así reguladores muy sensibles capaces de realizar grandes esfuerzos y con buenas velocidades de respuesta.

Con este tipo de reguladores también es posible variar el número de vueltas deseado del motor, y el grado de irregularidad al que funcionará. Es en este terreno en el cual se fueron perfeccionando los reguladores de resortes, hasta llegar al regulador de Tolle, en el cual el número de vueltas puede modificarse aún sobre la marcha, y es considerado como el más perfecto de los reguladores.

5.2.1 Variación del número de vueltas deseado

En general, los reguladores se usan para regular motores Diesel o de vapor. En estos **motores**, el par motor es aproximadamente independiente del número de vueltas y disminuye a medida que se cierra la válvula de suministro de combustible o vapor, es decir, disminuye a medida que se separan las masas giratorias.

En la Figura 34 están trazadas las curvas de par motor y resistente para los diferentes valores de r

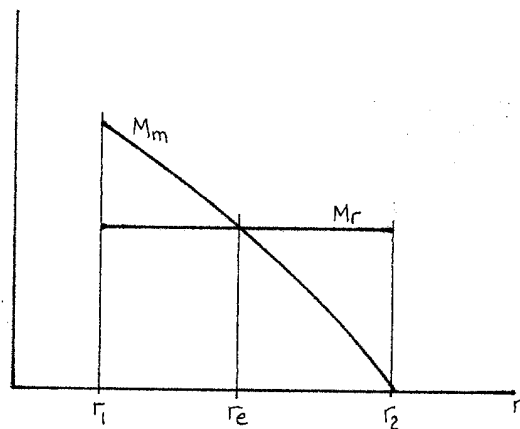


FIGURA 34

Los radios r_1 y r_2 son los valores de apertura del regulador correspondientes con las velocidades mínima y máxima deseadas.

Las curvas de M_m y M_r representan el par motor y el par torsor respectivamente.

Se ve en la Figura 34, que el par motor y el resistente se igualarán en correspondencia con un radio de giro r_e , independientemente de la velocidad.

Si se varía la velocidad de rotación deseada, variará el va-

lor de la Fuerza centrífuga, y para que el nuevo punto de equilibrio se halle a la nueva velocidad, la Fuerza de control en $r=r_e$ debe variar hasta igualar el valor de la Fuerza centrífuga.

Para conseguir este cambio, es necesario variar alguno de los parámetros que definen la curva de F .

Para aumentar el número de vueltas es necesario aumentar F y esto generalmente se hace aumentando la compresión inicial del resorte.

En general, al variar el número de vueltas, también varía el grado de irregularidad.

5.2.2 Variación del grado de irregularidad

En el punto 2.9, se vió una interpretación gráfica del grado de irregularidad.

Una forma de disminuirlo, es disminuyendo la pendiente de la curva de F , sin variar el valor de F en el punto de equilibrio. Para lograr este cambio, en general, se disminuye la constante del resorte, sin disminuir su fuerza de compresión inicial. Esto puede hacerse, por ejemplo aumentando el número de espiras activas del resorte, como en el regulador de Treck.

Si la curva de F se eleva sin variar su pendiente, el grado de irregularidad disminuirá, pues aumentará la longitud del segmento \bar{CD} (Figura 8), y disminuirá la del segmento \bar{AB} .

La sensibilidad de un regulador, y su grado de irregularidad guardan una estrecha relación, aumentando el valor de uno de estos parámetros cuando disminuye el valor del otro.

5.2.3 Reguladores Hartung primitivo y Hartnell

Tienen el mismo esquema básico, pero mientras que en el Hartnell las masas rotativas son dos bolas, en el Hartung son cuatro elipsoides. Son los reguladores de resortes más simples.

5.2.3.1 Modelo

Para estudiar estos reguladores se usará el modelo de la Figura 35

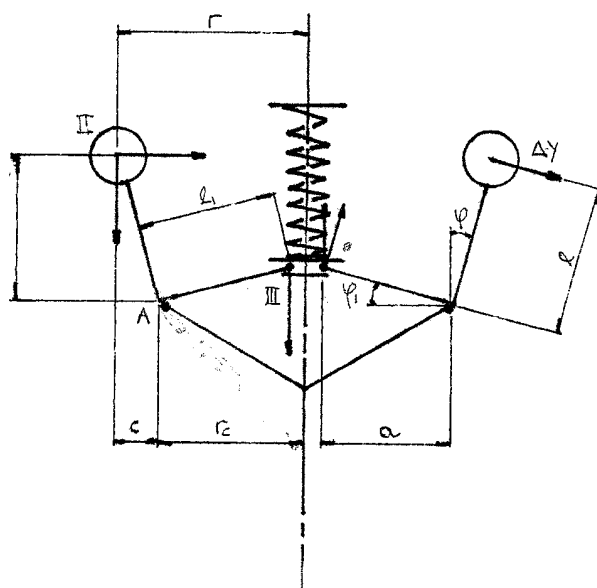


FIGURA 35

5.2.3.2 Fuerza de control

En este caso, la Fuerza de control está compuesta por el efecto del resorte (F_k) y el efecto del peso de las masas centrífugas (F_m).

$$F = F_m + F_k$$

Tomando momentos respecto del punto A

$$-mgc = F_m d$$

$$F_m = -mg \frac{c}{d} = -mg \operatorname{tg} \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r - r_c}{\sqrt{l^2 - (r - r_c)^2}}$$

$$P_k \cdot a = F_k \cdot d$$

$$F_k = P_k \frac{a}{d} = P_k \frac{l_1 \cos \varphi_1}{l \cos \varphi}$$

Pero

$$P_k = kx + P_{ke}$$

donde $X=0$ en la posición de equilibrio. P_{ke} es la Fuerza del resorte sobre el manguito en el equilibrio, y causa el mismo efecto estático que un peso sobre el manguito P_{ke} , con la ventaja que no agrega la gran masa que correspondería a ese peso.

En el caso particular que en el equilibrio la barra A-III se halle horizontal, y la barra A-II vertical

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi \\ \Delta x &= \Delta z \cos \varphi \\ \Delta r &= \Delta y \cos \varphi\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\Delta z}{\Delta y}$$

En una pequeña rotación alrededor de A

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{l_1} &= \frac{\Delta y}{l} \\ \frac{\Delta z}{\Delta y} &= \frac{l_1}{l}\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{dx}{dr} = \frac{l_1}{l}$$

La reducción de la constante k será:

$$k_r = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 k$$

La reducción de P_{he}

$$F_{he} = \frac{l_1}{l} P_{he}$$

$$F_h = k_r (r - r_c) + F_{he}$$

$$F_h = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 k (r - r_c) + \frac{l_1}{l} P_{he}$$

La curva F_h es una recta, y puede ser estable o no, dependiendo de la tensión inicial del resorte.

Esta tensión se regula de modo que la curva total de F sea estable, y con la sensibilidad deseada.

La curva de F , en este caso particular será

$$F = -m g \frac{r - r_i}{\sqrt{l^2 - (r - r_c)^2}} + \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 k (r - r_c) + \frac{l_1}{l} P_{he}$$

Las curvas de F_m , F_h y F están trazadas en la Figura 36.

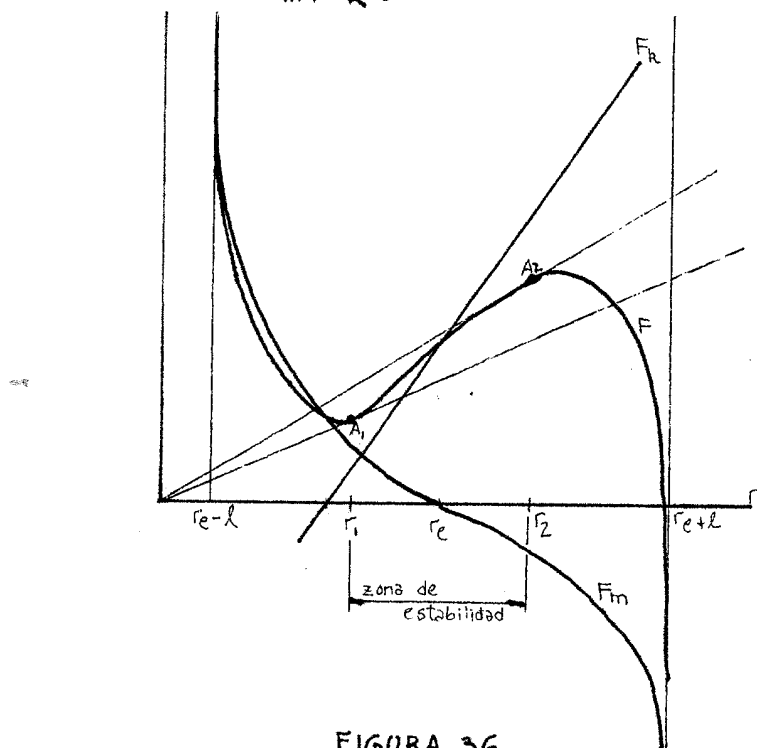


FIGURA 36

5.2.3.3 Análisis

En la Figura 36 se ve que la curva de F presenta dos puntos astáticos, A_1 y A_2 , y los reguladores sólo son estables entre ambos puntos. Para algunos valores de los parámetros, puede ser que A_1 se ubique debajo de la abcisa, y en ese caso habrá un solo punto astático útil.

La existencia de los puntos astáticos permite lograr grandes sensibilidades, pues cuanto más cerca se esté de ellos mayor es la sensibilidad, además, al haber dos puntos astáticos, delimitando la zona estable, la zona de alta sensibilidad tendrá gran extensión. Debido a que la Fuerza de control es causada casi exclusivamente por resortes, de masa despreciable, la masa reducida del sistema es muy pequeña, con lo que la velocidad de respuesta del regulador será aceptable, a pesar de tener tan alta sensibilidad.

5.2.4 Regulador de Trenck

5.2.4.1 Modelo

Para estudiar el regulador de Trenck se usará el modelo de la Figura 37

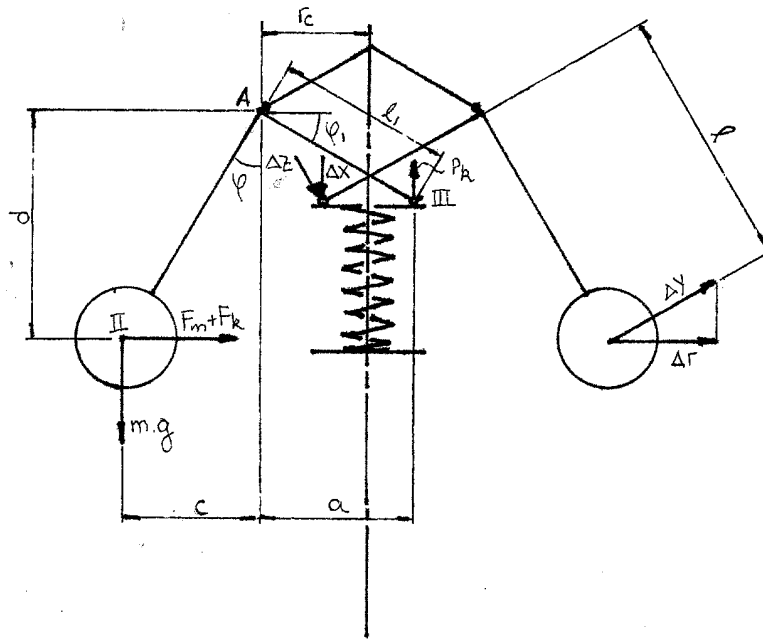


FIGURA 37

5.2.4.2 Fuerza de control

Al igual que en los reguladores anteriores

$$F = F_m + F_k$$

$$F_m \cdot d = m \cdot g \cdot c$$

$$F_m = m \cdot g \cdot \frac{c}{d} = m \cdot g \cdot \tan \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{r - r_c}{\sqrt{l^2 - (r - r_c)^2}}$$

$$F_h = k_r(r - r_e) + F_{ke}$$

$$k_r = \left(\frac{dx}{dr} \right)^2 k$$

$$F_{ke} = \frac{dx}{dr} P_{ke}$$

En la Figura 37 se ve que para un pequeño giro alrededor de A

$$\frac{\Delta z}{l_1} = \frac{\Delta y}{l}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{l_1}{l}$$

$$\Delta r = \Delta y \cos \varphi$$

$$\Delta x = \Delta z \cos \varphi_1$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{l_1}{l} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi}$$

En el límite

$$\frac{dx}{dr} = \frac{l_1}{l} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi}$$

$$F_k = \left(\frac{l_1}{l} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi} \right)^2 k (r - r_e) + \frac{l_1}{l} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi} P_{ke}.$$

Si las dos varillas están a 90°

$$F_k = \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 k (r - r_e) + \frac{l_1}{l} P_{ke}$$

La curva de F_m es estable, y la de F_k es una recta, que variando el valor de sus parámetros puede ser estable, inestable o astática.

$$F = mg \frac{r - r_e}{\sqrt{l^2 - (r - r_e)^2}} + \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 k (r - r_e) + \frac{l_1}{l} P_{ke}$$

Las curvas de F_m , F_k y F están trazadas en la Figura 38.

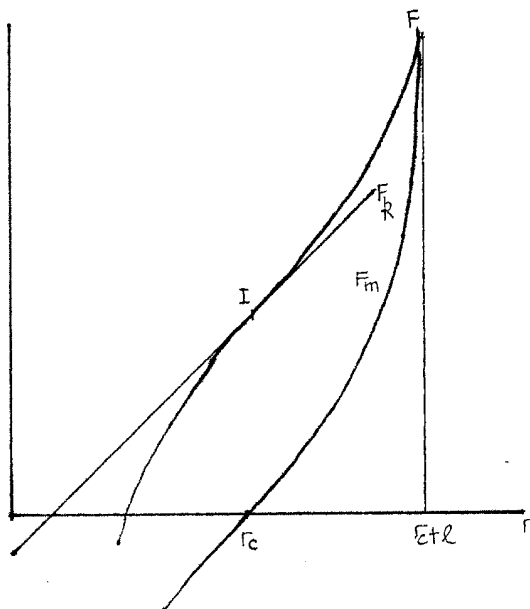


FIGURA 38

5.2.4.3 Análisis

La curva de F del regulador de Trenck presenta un punto de inflexión I en correspondencia con E , y dando los valores adecuados a las diferentes variables, el punto I puede ser de astatismo, con lo que el regulador adquirirá gran sensibilidad. El hecho de que el punto de astatismo sea un punto de inflexión representa una ventaja, pues a ambos lados de este punto el regulador es estable, y por lo tanto se lo puede hacer trabajar sobre este punto sin peligro, cosa que no se puede hacer con los reguladores del punto 5.2.1, pues más allá del punto astático su funcionamiento es inestable.

Dado que es un regulador de resortes, las masas actuantes serán muy pequeñas, con lo que el sistema presentará una buena velocidad de respuesta, aún teniendo sensibilidades muy altas.

5.2.5 Regulador Beyer

Presenta la propiedad de que permite cambiar su número de vueltas sin que se altere el grado de irregularidad, pues con la ayuda de un sistema de tuerca y contratuerca es posible variar la constante y la compresión inicial del resorte.

5.2.5.1 Modelo

Como su configuración es similar a la de un regulador Hartnell, se usará el modelo de la Figura 35.

5.2.5.2 Fuerza de control

La curva de F obtenida será similar a la de un regulador Hartnell, que se ve en la Figura 36.

5.2.5.3 Análisis

La ventaja de este regulador es su posibilidad de variar el número de vueltas sin alterar su grado de irregularidad.

Para aumentar el número de vueltas se comprime el resorte, con lo que la curva de F se eleva a la de F_A , aumentando la velocidad de rotación en el equilibrio a ω_A , y disminuyendo el grado de irregularidad. También aumenta la sensibilidad.

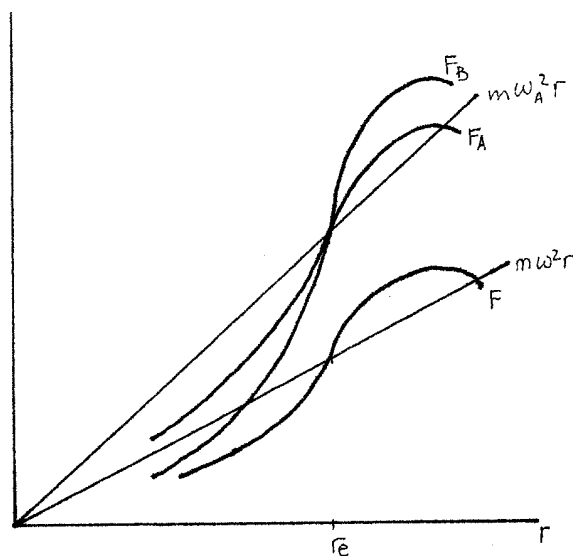


FIGURA 39

Para volver al grado de irregularidad anterior, con un sistema de tuerca y contratuerca se disminuye el número de espiras activas del resorte, aumentando su constante elástica, y por lo tanto aumentando la pendiente de la curva. La compresión inicial del resorte no varía, entonces la Fuerza de control en el punto de equilibrio tampoco. La curva obtenida es la F_b , en la Figura 39.

5.2.6 Regulador Hartung de resortes transversales

En este regulador se varía la carga en el manguito por medio de pesos corredizos que actúan sobre una palanca. En algunos modelos en vez de pesos se usan resortes, pero de esta manera el rozamiento propio del regulador, aumenta.

5.2.6.1 Modelo

Para estudiar el regulador de Hartung se usará el modelo de la Figura 40.

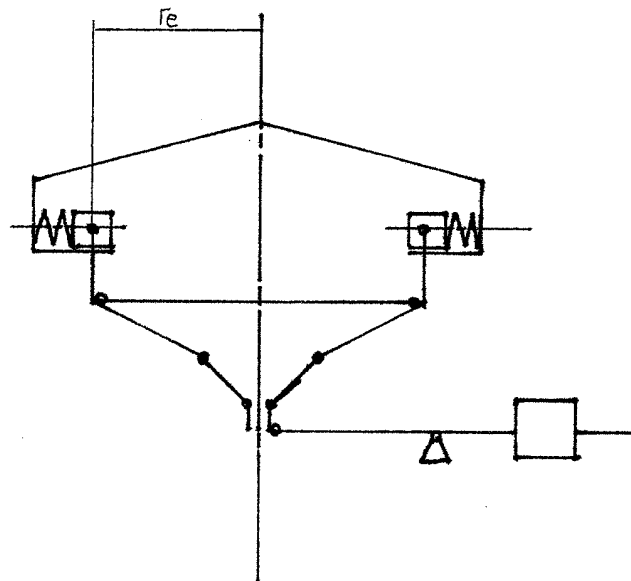


FIGURA 40

5.2.6.2 Fuerza de control

En este regulador, como en todos los reguladores axiales, $F_m = 0$ para cualquier radio.

Por lo tanto $F = F_k + F_m$

Como los resortes actúan directamente sobre las masas giratorias:

$$F_k = k(r - r_e) + F_{ke}$$

La curva de F_m es muy inestable, pues aún en reposo el regulador tiende a abrirse. Variando esta curva es posible variar la curva de F , y por lo tanto el número de vueltas.

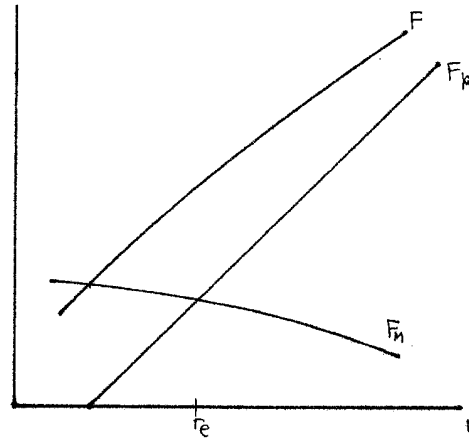


FIGURA 41

5.2.6.3 Análisis

Este regulador difiere de los demás, en que para lograr una alta sensibilidad, hace inestable la curva de F_m . Por lo demás, cumple con las ventajas de cualquier regulador común de resortes.

5.2.7 Regulador de Tolle

Suele considerárselo como el más perfecto de los reguladores pues, no sólo tiene buena sensibilidad y velocidad de respuesta, sino que además es posible alterar el número de vueltas y el grado de irregularidad a voluntad

5.2.7.1 Modelo

Para estudiar el regulador de Tolle se usará el modelo de la Figura 42.

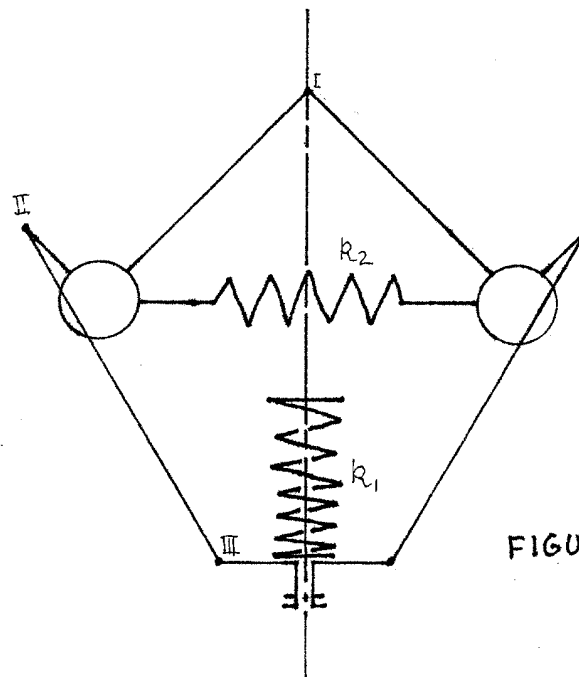


FIGURA 42

5.2.7.2 Fuerza de control

En este caso

$$F = F_m + F_{k_1} + F_{k_2}$$

La curva de F_m es similar a la de un regulador de Watt, pues las masas son pendulares.

La curva de F_{h_2} es rectilínea y puede ser estable, inestable o astática.

Según Latzina (ref. 2) la curva de F_m sería astática, y por lo tanto la curva de F_R será siempre estable.

Finalmente la curva de F será rectilínea.

5.2.7.3 Análisis

Variando la tensión del resorte longitudinal se modifica el número de vueltas, pero como F_m es astática, al aumentar la tensión inicial, también aumenta la pendiente de la curva, y por lo tanto no se modifica el grado de irregularidad.

Si se aumenta la tensión del resorte transversal, cambia el valor de δ , y el incremento en el número de vueltas puede anularse aflojando el resorte longitudinal.

6. CONCLUSIONES

Los reguladores centrífugos nacieron para regular motores de vapor, luego se aplicaron a los grandes motores Diesel estáticos, y con el avance de la electrónica fueron perdiendo terreno en las aplicaciones a grandes motores, hasta casi desaparecer, sin embargo, cuando es necesaria una alta confiabilidad, o en el caso de pequeñas máquinas, en las que la simplicidad es un factor esencial mantuvieron su vigencia, aun sin sufrir mayores perfeccionamientos.

En turbinas eólicas tanto la simplicidad como la confiabilidad son determinantes, y por eso los reguladores centrífugos comienzan nuevamente a cobrar auge, mereciendo una profunda revisión, que se encara en esta investigación.

El primer regulador fue el de Watt, que fue perfeccionado por Porter aumentando su velocidad de respuesta. Una vez alcanzada una velocidad de respuesta aceptable, lo que se buscó fue una alta sensibilidad, que se consiguió al inventarse reguladores como los de Kley o Proell, que tienen curvas de F con puntos estáticos. Posteriormente surgieron los reguladores de resortes, que introdujeron el concepto fundamental de producir grandes fuerzas de control con pequeñas masas. En la evolución de los reguladores de resortes lo que se buscó fue lograr una versatilidad cada vez mayor, lograndose el máximo en el regulador de Tolle.

Un posterior perfeccionamiento, mas alla del interés de este trabajo, fue la introducción de servomecanismos.

BIBLIOGRAFIA

1. Tolle, "Regelung der Kraftmaschinen"
2. Latzina, "Regulación de los motores térmicos"
3. Dubbel, "Máquinas y turbinas de vapor"
4. Proell, "Regulatoren und Regulierungs Fragen"
5. Hutte, "Manual del Ingeniero", Tomo II
6. Marks, "Mechanicals Engineers Handbook"
7. Gilli, "Reguladores"
8. Pezzano Klein, "Construcción de los motores térmicos"
9. Guldner, "Motores de construcción interna y gasógenos"
10. Mayr, "Feedback Mechanismen"
11. Hannah, Stephens, "Mechanics of machines"
12. Champly, "Nouvelle Encyclopedie pratique des constructeurs"
Tomos 10 y 16.
13. Dubbel, "Manual del constructor de máquinas" Tomo II