**PHYSQ 208 – Devoir 9 (jeudi 24 novembre)**

**1. Fonction d'onde.** Soit la fonction d'onde $y(x) = A \sin(kx)$, où $k = 2\pi/\lambda$ et $A$ est une constante réelle.

(a) Pour quelles valeurs de $x$ trouve-t-on la plus grande probabilité de trouver la particule?
(b) Pour quelles valeurs de $x$ la probabilité vaut-elle zéro?

**2. Normalisation de la fonction d'onde.** Considérez une particule se déplaçant selon l'axe $x$.

(a) Que signifie le fait que la fonction d'onde de cette particule soit *normalisée*?
(b) La fonction d'onde $\psi(x) = e^{ax}$, où $a$ est un nombre *réel et positif*, est-elle normalisée? Serait-ce une fonction d'onde valide?
(c) Si la particule décrite par la fonction d'onde $\psi(x) = Ae^{-bx}$, où $A$ et $b$ sont des nombres réels positifs, est confiné à l'intervalle $x \geq 0$, déterminez $A$ (y compris ses unités) de sorte que la fonction d'onde soit normalisée.

**3. Puits infini et niveaux d'énergie.** Calculez les énergies, en eV, des *cinq* niveaux les plus bas d'un *électron*, de masse 511 keV/$c^2$, dans un puits infini dont $a = 0.106$ nm (soit le diamètre de l'orbite fondamental d'un électron dans un atome d'hydrogène).

**4. Puits infini et probabilité.** Considérez une particule dans l'état fondamental d'un puit infini de largeur $a$.

(a) En évaluant une intégrale, quelle est la probabilité que la particule soit entre 0 et $b \leq a$?
(b) Que vous donne votre réponse en A si $b = a/2$?
(c) Que vous donne votre réponse en A si $b = a/4$? Justifiez à l'aide d'un schéma pourquoi vous n'obtenez pas une probabilité de 25%.

**5. Puits infini et probabilité.** Considérez une particule dans le deuxième état excité ($n = 3$) dans un puit infini de largeur $a$.

(a) Écrivez la fonction de distribution de probabilité, $|\psi_3(x)|^2$, pour cet état et tracez en un graphique.
(b) D'après le graphique, quelles sont les positions les plus probables, en termes de $a$?
(c) Quelle est l'intégrale de la probabilité que la particule soit dans l'intervalle [0.50$a$, 0.51$a$]?
(d) Comparez votre réponse précédente avec l'approximation $|\psi_3(0.50a)|^2 \Delta x$, où $\Delta x = 0.01a$.

# PHYSQ 208, DEVOIR 9 (24 NOV 2022)

#1. DENSITÉ DE PROBABILITÉ $|\psi(x)|^2 = A^2 \sin^2 kx$

(a) $A^2 \sin^2 kx$ MAXIMAL QUAND $\sin kx = \pm 1$ DONC

à $kx = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{2n+1}{2}\pi$

AVEC $n$ ENTIER (+ OU −). AVEC $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, ON ISOLE

$$x = \frac{2n+1}{2}\pi \times \frac{\lambda}{2\pi} = (2n+1)\frac{\lambda}{4} = \boxed{\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots}$$

SI ON NE GARDE QUE $x > 0$.

(b) $\sin kx = 0$ à $kx = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, n\pi, \ldots$

OÙ $n$ EST ENTIER. AINSI, AVEC $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$x = n\pi \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = n \cdot \frac{\lambda}{2} = \boxed{0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots}$$

**#2.** (a) $|\psi|^2 dV$ = Probabilité que la particule soit dans le volume $dV$.

$\int |\psi|^2 dV = 1$ car la particule se trouve quelque part. En 1D, on aura donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1}$$

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{ax})^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ax} dx = \left[\frac{e^{2ax}}{2a}\right]_{-\infty}^{\infty} = \boxed{\infty}$$

Fonction **non-normalisable** donc **non valide**

(c) ici $V$ = axe $x \geq 0$. Pour normaliser $\psi$,

$$\int_0^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 = \int_0^{\infty} A^2 e^{-2bx} dx = \left.\frac{A^2 e^{-2bx}}{-2b}\right|_0^{\infty}$$

$$= A^2\left(0 - \frac{1}{-2b}\right) = \frac{A^2}{2b} \rightarrow \boxed{A = \sqrt{2b}}$$

#3. DES NOTES, p. 15 EQ (6.35)

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \frac{n^2 (hc)^2 \pi^2}{2 (2\pi)^2 mc^2 a^2} = \frac{n^2 (hc)^2}{8 mc^2 a^2}$$

$$= \frac{n^2 (1240 \text{ eV}\cdot\text{nm})^2}{8 (5.11 \times 10^5 \text{ eV}) (0.106 \text{ nm})^2}$$

$$= 33.475\, n^2 \text{ eV}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_1 &= 33.5 \text{ eV} \\ E_2 &= 134 \text{ eV} \\ E_3 &= 301 \text{ eV} \\ E_4 &= 536 \text{ eV} \\ E_5 &= 837 \text{ eV} \end{aligned}}$$

#4. $\psi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$

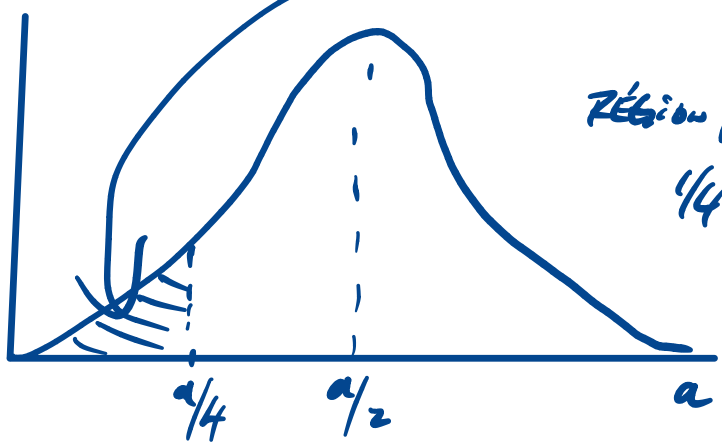
(a) $P(0\le x\le b)=\int_0^b \frac{2}{a}\underbrace{\sin^2\frac{\pi x}{a}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{a}}dx$

$$=\frac{2}{a}\left[\frac{x}{2}-\frac{a}{4\pi}\sin\frac{2\pi x}{a}\right]_0^b=\boxed{\frac{b}{a}-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi b}{a}}$$

(b) POUR $b=\frac{a}{2}$, ON A $\boxed{P=\frac{1}{2}=50\%}$

(c) POUR $b=\frac{a}{4}$, ON CALCULE

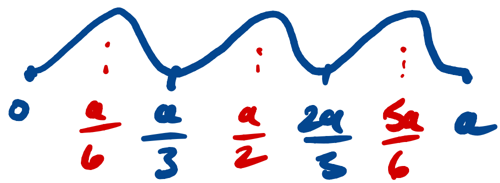
$$\boxed{P=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\simeq 9\%}$$




RÉGION HACHURÉE < 1/4 AIRE TOTALE

#5. (a) $|\psi_3|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi x}{a}$ A DEUX NOEUDS

À $x = \frac{a}{3}$ ET $\frac{2a}{3}$.




(b) $x$ PROBABLES : $\boxed{x = \frac{a}{6}, \frac{a}{2}, \frac{5a}{6}}$

(c) $$\int_\alpha^\beta |\psi_3|^2 dx = \frac{2}{a}\int_\alpha^\beta \sin^2\frac{3\pi x}{a}\,dx$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(1-\cos\frac{6\pi x}{a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\left[x - \frac{a}{6\pi}\sin\frac{6\pi x}{a}\right]_{\alpha=0.5a}^{\beta=0.51a}$$

$$= 0.51-0.5-\frac{1}{6\pi}\left(\sin 6\pi(0.51) - \sin 6\pi(0.5)\right)$$

$$= \boxed{1.99\%}$$

(d) $\frac{2}{\cancel{a}}\sin^2(3\pi 0.5)(0.01\cancel{a}) = 0.02 = \boxed{2\%}$