PHYSQ 208 – Devoir 8 (mardi 15 novembre)

1. Nombres complexes. Considérez le nombre complexe $\Psi = \dfrac{1-2i}{2+4i}$.

(a) Écrivez ce nombre sous la forme $\Psi = x + yi$ en éliminant le i du dénominateur, c.-à-d. en multipliant et divisant Ψ par $2 - 4\,i$.

(b) Écrivez Ψ sous la forme polaire $\Psi = \rho \exp(i\theta)$ (attention: angle en radians!).

2. Mécanique ondulatoire. Vous souhaitez concevoir une expérience similaire à celle de Jönsson (p. 183 de Thornton-Rex) de type interférence de faisceaux d'électrons par deux fentes minces séparées de 2000 nm. Vous placez l'écran à 80 cm des fentes. Supposez que vous puissiez distinguer à l'oeil des maxima qui sont espacés d'au moins 0.3 mm. Vous pouvez supposer que $\sin\theta \cong \tan\theta \cong \theta$.

(a) Quelle longueur d'onde ces électrons devront-ils avoir?

(b) Quelle sera leur quantité de mouvement?

(c) Et leur énergie cinétique (formule relativiste)?

(d) Quelle sera la vitesse de ces électrons?

3. Principe d'indétermination de Heisenberg. Considérez l'électron d'un atome d'hydrogène dans son état fondamental: $n = 1$.

(a) Quel est le diamètre de l'orbite de cet électron?

(b) En prenant l'incertitude Δx de la position de cet électron égale au diamètre de l'atome, trouvé en (a), quelle est l'incertitude Δp de la quantité de mouvement de l'électron?

(c) Dans le même cas, quelle est l'incertitude Δv de la vitesse de cet électron?

4. Amplitude de probabilité. La fonction d'onde d'une particule dans une boîte unidimensionnelle de largeur L est $\psi(x) = A\,\sin(\pi x/L)$. Sachant que la particule doit se trouver quelque part dans la boîte, avec probabilité de 100%, quelle doit être la valeur de A?
Indice: $\int \sin^2(kx)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2kx)$

5. Amplitude de probabilité. L'amplitude de probabilité de l'état $n = 3$ d'une particule confinée dans un puits infini entre $x = 0$ et $x = a$ est donnée par la fonction

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)$$

Quelle est la probabilité que la particule se trouve dans l'intervalle:

(a) $\dfrac{a}{3} \le x \le \dfrac{a}{2}$?

(b) $0.7a \le x \le 0.9a$?

PHYSQ 208, DEVOIR 8 (15 NOV. 2022)

#1. $\Psi = \dfrac{1-2i}{2+4i}$

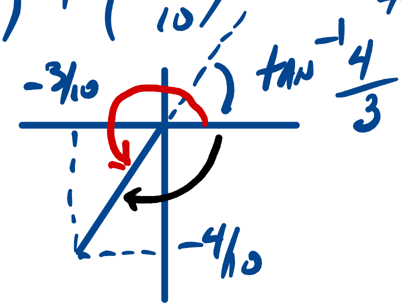
(a) $\Psi = \dfrac{1-2i}{2+4i} \times \dfrac{2-4i}{2-4i} = \dfrac{-6-8i}{2^2+4^2} = \boxed{\dfrac{-(3+4i)}{10}}$

c.-à-d. $\underbrace{-\dfrac{3}{10}}_{\psi_R} \underbrace{-\dfrac{4}{10}i}_{\psi_I}$

(b) $\rho^2 = \psi_R^2 + \psi_I^2 = \left(\dfrac{-3}{10}\right)^2 + \left(\dfrac{-4}{10}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

D'où $\rho = 0.5$

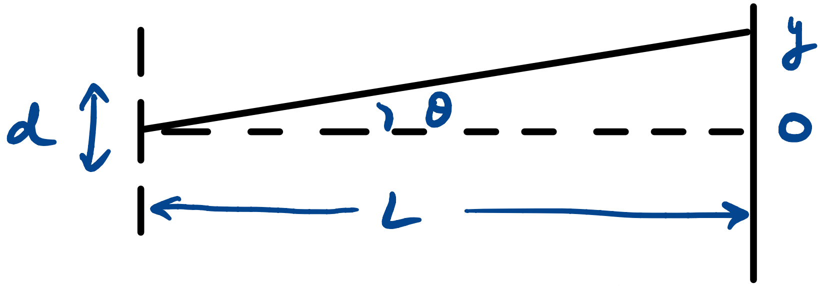
$\tan\theta = \dfrac{-4}{-3}$



$\theta = \tan^{-1}\dfrac{4}{3} + \pi = 4.07\ \text{rad}$ ou $-2.21\ \text{rad}$

$\Psi = \rho e^{i\theta} = \boxed{0.5\, e^{-2.21 i} \text{ ou } 0.5\, e^{4.07 i}}$

#2.



$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L} = \frac{0.3\text{ mm}}{800\text{ mm}} = 3.75\times10^{-4}$$

(a) $\lambda = d\sin\theta \approx d\theta$

$$= (2000\text{ nm})(3.75\times10^{-4}) = \boxed{0.75\text{ nm}}$$

(b) $$p = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{1240\text{ eV}\cdot\text{nm}}{(0.75\text{ nm})c} = \boxed{1653\ \frac{\text{eV}}{c}}$$

(c) DE $K = E - mc^2$ ET $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$,

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$$

$$= \sqrt{1653^2 + 511000^2} - 511000 = \boxed{2.67\text{ eV}}$$

(d) $$\beta = \frac{pc}{E} = \frac{1653}{\sqrt{1653^2 + 511000^2}}$$

$$= \boxed{3.23\times10^{-3} \text{ ou } 9.7\times10^{5}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

#3. (a) $d = 2a_B = 2(0.0529177 \text{ nm})$

$= \boxed{0.1058 \text{ nm}}$

(b) ON PREND $\Delta x = 0.1058 \text{ nm}$ ET

$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ DONNE

$\Delta p_{min} = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.05486 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2(1.058 \times 10^{-10} \text{ m})}$

$= \boxed{4.98 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}}$

(c) $\Delta v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{4.98 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}$

$= \boxed{5.47 \times 10^{5} \text{ m/s}}$

#4. $\int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 1$ Pour $A = ?$

De $\int \sin^2(kx)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2kx)$ Avec $k = \frac{\pi}{L}$

$$A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = A^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{L}{4\pi} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}_{0 \text{ à } 0 \text{ et } L}\right]_0^L = A^2 \frac{L}{2}$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2}{L}}}$$

#5. AVEC $\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)$ LA PROBABILITÉ QUE $\alpha \leq x \leq \beta$ VAUT

$$\int_\alpha^\beta |\psi_3|^2 dx = \frac{2}{a}\int_\alpha^\beta \sin^2\left(\frac{3\pi}{a}x\right)dx$$

AVEC $\int \sin^2(kx)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2kx)$, ON A

$$\int_\alpha^\beta |\psi_3|^2 dx = \frac{2}{a}\left[\frac{x}{2} - \frac{a}{12\pi}\sin\left(\frac{6\pi x}{a}\right)\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{a} - \frac{1}{6\pi}\left[\sin\frac{6\pi\beta}{a} - \sin\frac{6\pi\alpha}{a}\right]$$

(a) $\alpha = \frac{a}{3}$, $\beta = \frac{a}{2}$ DONNE

$$P = \frac{1}{a}\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) - \frac{1}{6\pi}\left[\sin 3\pi - \sin 2\pi\right] = \frac{1}{6} \simeq \boxed{0.167}$$

(b) $\alpha = 0.7a$, $\beta = 0.9a$

$$P = 0.2 - \frac{1}{6\pi}\left[\sin 5.4\pi - \sin 4.2\pi\right] = \boxed{0.28}$$