

PHYSQ 208 – Devoir 7 (jeudi 3 novembre)

1. Atome hydrogéoïde. Décrivez le spectre d'absorption visible, c.-à-d. énumérez les longueurs d'ondes entre 400 et 700 nm, et les valeurs de n correspondantes, pour

- (a) un atome d'hydrogène, dont $Z = 1$, et
- (b) un atome d'hélium ionisé He^+ , qui a $Z = 2$.

2. Masse réduite. Considérez l'hydrogène constitué d'un proton et d'un électron.

- (a) En suivant notre discussion sur la masse réduite μ , écrivez l'énergie cinétique totale $K = K_e + K_p$ en termes de μ , ω et r (avec $r = r_e + r_p$).
Indice: utilisez $m_e r_e = m_p r_p$, et obtenez $r_e = m_p r / (m_e + m_p)$, et l'analogue pour r_p .
- (b) Avec la 2^e loi de Newton pour l'électron, écrivez $F_e = ke^2/r^2$ en termes de μ , ω et r .
Indice: l'accélération centripète est $a_{cp} = \omega^2 r$.
- (c) Écrivez le moment cinétique total $L = L_e + L_p$ en termes de μ , ω et r . Rappel: $v = \omega r$.
- (d) Utilisez vos réponses en (b) et (c), et la quantification $L = n\hbar$ pour prouver que la formule $E_n = -\frac{E_R}{n^2}$ est encore valide et écrivez le nouveau E_R en termes de k , e , μ et \hbar .
Indice: trouvez une expression semblable au rayon de Bohr a_B , et notez ce qui change.

3. Spectre des rayons X. Pour les questions suivantes, remplacez Z par $Z - \delta$ et prenez $\delta \approx 1$.

- (a) Un rayon X de type K_α est émis d'un échantillon avec un énergie de 7.46 keV. De quel élément cet échantillon est-il constitué?
- (b) Quelle est l'énergie, la fréquence et la longueur d'onde d'un rayon X de type K_α émis d'un échantillon constitué de calcium?
- (c) Refaites la partie (b) pour le cobalt.

4. Ondes de de Broglie. Si un photon (masse zéro), un électron ($m_e c^2 = 511$ keV) et un proton ($m_p c^2 = 938$ MeV) ont chacun une énergie (cinétique) de 20.0 eV

- (a) quelles sont leurs longueurs d'onde? *Indice:* prenez $K = p^2/2m$ non-relativiste.
- (b) Même question, si chacun a une énergie cinétique de 600 MeV. Prenez le K relativiste.

5. Ondes de de Broglie. Quelle est la longueur d'onde d'un électron d'énergie cinétique

- (a) 40 eV?
- (b) 400 eV?
- (c) 4.0 keV?
- (d) 40 keV?
- (e) 0.40 MeV?
- (f) 4.0 MeV?
- (g) Laquelle, parmi ces énergies, est la plus appropriée pour l'étude du cristal de NaCl dont l'espacement des plans vaut 0.282 nm?

PHYS 208. DEVOIR 7 (3 NOVEMBRE 2022)

#1. POUR UNE TRANSITION DE $n \rightarrow n'$, AVEC $n > n'$,
DE $E_n = -\frac{E_R}{n^2}$ ($E_R = 13.6 \text{ eV}$) ET $\frac{hc}{\lambda_{nn'}} = E_n - E_{n'}$,

$$\text{ON TROUVE } \frac{1}{\lambda_{nn'}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{OÙ } R = \frac{E_R}{hc} = \frac{13.6 \text{ eV}}{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}} \approx 1.097 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1}$$

(a) HYDROGÈNE :

CAS $n'=2$

$$\lambda_{32} = 656 \text{ nm}, \quad \lambda_{42} = 486 \text{ nm}$$
$$\lambda_{52} = 434 \text{ nm}, \quad \lambda_{62} = 410 \text{ nm}$$

POUR $n'=1$ $\lambda_{21} = 122 \text{ nm}$ ET $\lambda_{n1} < \lambda_{21}$, $n > 2$.
ULTRAVIOLET.

POUR $n'=3$ $\lambda_{43} = 1875 \text{ nm}$, ETC INFRAROUGE.

(b) Hélium $Z=2$, $E_n = -\frac{Z^2 E_R}{n^2}$

$$\text{DONC } R = \frac{4E_R}{hc} = 4.387 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1}$$

QUI DIVISE CHAQUE $\lambda_{nn'}$ DE H PAR 4.

LES CAS $n'=1, 2$ SONT DANS UV.

$$\lambda_{n'} = \frac{1}{4.387 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1}} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)^{-1}$$

$$\lambda_{4,3} = 469 \text{ nm} \quad \lambda_{5,3} = 320 \text{ nm UV}$$

$$\lambda_{5,4} = 1013 \text{ nm IR}$$

$$\lambda_{6,4} = 656 \text{ nm} \dots \quad \lambda_{13,4} = 403 \text{ nm}$$

$$\lambda_{6,5} = 1865 \text{ nm} \dots \quad \lambda_{11,5} = 718 \text{ nm IR}$$

$$\lambda_{12,5} = 689 \text{ nm}, \quad \lambda_{13,5} = 668 \text{ nm} \dots$$
$$\lambda_{2,5} = 570 \text{ nm}$$

Pour $n' \geq 6$, $\lambda_{n',n} > 700 \text{ nm}$.

$$\#2.(a) \quad m_e r_e = m_p r_p \quad \text{AVEC} \quad r = r_p + r_e$$

$$\text{DONNE} \quad m_e r_e = m_p (r - r_e) = m_p r - m_p r_e$$

$$(m_e + m_p) r_e = m_p r$$

$$r_e = \frac{m_p r}{m_e + m_p}$$

$$m_p r_p = m_e (r - r_p) = m_e r - m_e r_p$$

$$(m_e + m_p) r_p = m_e r$$

$$r_p = \frac{m_e r}{m_e + m_p}$$

$$K = K_e + K_p = \frac{1}{2} m_e v_e^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2 \quad v = r\omega$$

$$= \frac{1}{2} m_e r_e^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_p r_p^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[m_e \frac{m_p^2 r^2}{(m_e + m_p)^2} + m_p \frac{m_e^2 r^2}{(m_e + m_p)^2} \right] \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} r^2 \omega^2 = \boxed{\frac{1}{2} \mu r^2 \omega^2}$$

$$\#2(b) F_e = m_e a \text{ si } a = \omega^2 r_e, F_e = \frac{k_e^2}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \text{DONNENT } \frac{k_e^2}{r^2} &= m_e \omega^2 r_e = m_e \omega^2 \frac{m_p r}{m_e + m_p} \\ &= \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \omega^2 r = \boxed{\mu \omega^2 r} \end{aligned}$$

$$(c) L = L_e + L_p$$

$$= m_e r_e^2 \omega + m_p r_p^2 \omega$$

$$= m_e \left(\frac{m_p r}{m_e + m_p} \right)^2 \omega + m_p \left(\frac{m_e r}{m_e + m_p} \right)^2 \omega$$

$$= \frac{m_e m_p^2 + m_p m_e^2}{(m_e + m_p)^2} r^2 \omega$$

$$= \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} r^2 \omega = \boxed{\mu r^2 \omega}$$

$$\#2(d) \text{ DE (c)}, L = \mu r^2 \omega = n \hbar \quad \text{DONNE}$$

$$\omega = \frac{n \hbar}{\mu r^2} \quad \text{DE (b)} \quad \frac{k e^2}{r^2} = \mu \omega^2 r \quad \text{DONNE}$$

$$\omega^2 = \frac{k e^2}{\mu r^3} = \frac{n^2 \hbar^2}{\mu^2 r^4}$$

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{\mu k e^2} = n^2 a_B$$

AVEC $a_B = \frac{\hbar^2}{\mu k e^2}$ PLUTÔT QUE $a_B = \frac{\hbar^2}{m k e^2}$

L'ÉNERGIE DE RYDBERG DEVIENT

$$E_R = \frac{\mu (k e^2)^2}{2 \hbar^2}$$

$$\#8 \text{ (a)} \quad K_{\alpha} \quad n'=1, \quad n=2$$

$$E = (Z-1)^2 E_R \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = (Z-1)^2 (13.6 \text{ eV}) \left(\frac{3}{4}\right) \\ = (10.2 \text{ eV}) (Z-1)^2$$

$$\text{e: } E = 7460 \text{ eV}, \quad Z = 1 + \sqrt{\frac{7460}{10.2}} = \boxed{28}$$

NICKEL

(b) Pour le calcium $Z=20$

$$E = \frac{3}{4} (Z-1)^2 E_R = \frac{3}{4} (19)^2 (13.6) = \boxed{3680 \text{ eV}}$$

$$f = \frac{E}{h} = \frac{3680 \text{ eV}}{4.14 \times 10^{-5} \text{ eV}\cdot\text{s}} = \boxed{8.89 \times 10^{17} \text{ Hz}}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{3680 \text{ eV}} = \boxed{0.337 \text{ nm}}$$

$$\text{(c)} \quad E = \frac{3}{4} (26)^2 (13.6) = \boxed{6900 \text{ eV}}$$

$$f = \frac{6900}{4.14 \times 10^{-5}} = \boxed{1.67 \times 10^{18} \text{ Hz}}$$

$$\lambda = \frac{1240}{6900} = \boxed{0.180 \text{ nm}}$$

$$\#4. (a) K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(pc)^2}{2mc^2} \text{ donne } pc = \sqrt{2mc^2K}$$

VALIDE SI $K \ll mc^2$ comme ici.

$$\text{PHOTON: } \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{20 \text{ eV}} = \boxed{62 \text{ nm}}$$

$$\text{ÉLECTRON: } \lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2K}} = \frac{1240}{\sqrt{2(511000)(20)}} = \boxed{0.274 \text{ nm}}$$

$$\text{PROTON: } \lambda = \frac{1240}{\sqrt{2(9.38 \times 10^8)(20)}} = \boxed{6.40 \times 10^{-3} \text{ nm}}$$

(b) CAS RELATIVISTE: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ ET
 $E = K + mc^2$ MÈNE À

$$pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{(K + mc^2)^2 - (mc^2)^2}$$

$$= \sqrt{K^2 + 2mc^2K}$$

$$\text{PHOTON: } \lambda = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{6 \times 10^8 \text{ eV}} = \boxed{2.07 \times 10^{-15} \text{ m}}$$

$$\text{ÉLECTRON: } \lambda = \frac{1240}{\sqrt{(668)^2 + 2(5.11 \times 10^5)(668)}} = \boxed{2.06 \times 10^{-15} \text{ m}}$$

$$\text{PROTON: } \lambda = \boxed{1.02 \times 10^{-15} \text{ m}}$$

$$\#5. \lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\sqrt{K^2 + 2mc^2K}}$$

$$mc^2 = 5.11 \times 10^5 \text{ eV} \quad hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$$

ON CALCULATOR:

(a) $\lambda = 0.144 \text{ nm}$	(b) $\lambda = 6.13 \times 10^{-2} \text{ nm}$
(c) $\lambda = 1.94 \times 10^{-2} \text{ nm}$	(d) $\lambda = 6.02 \times 10^{-3} \text{ nm}$
(e) $\lambda = 1.64 \times 10^{-3} \text{ nm}$	(f) $\lambda = 2.77 \times 10^{-4} \text{ nm}$

(a) car $\lambda \approx 0.282 \text{ nm}$
--