PHYSQ 131 LEC B2/EB2 – Mécanique
Examen final – consolidé avec EN PH 131 de
Faculty of Engineering* et *Department of Physics
Hiver 2011

Nom SOLUTIONS

Numéro d'étudiant.e ____

Professeur	Marc de Montigny
Date et heure	Samedi, 16 avril 2011, de 14h00 à 16h30
Salle	Pavillon McMahon, local 366

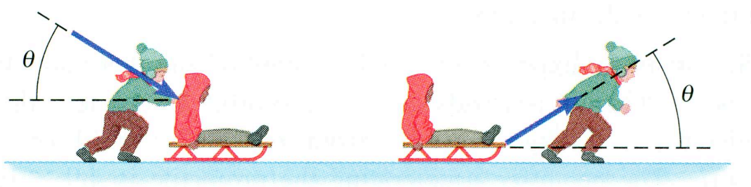
Instructions

- Ce cahier contient **16 pages**. Écrivez-y directement vos réponses.
- Cet examen est sur **65 points** et vaut **50%** de la note finale du cours.
- Cet examen contient **15 questions à choix multiple (1 point chaque)** et **5 problèmes (10 points chaque)**. Pour les questions, encerclez la meilleure réponse. Pour les problèmes, expliquez de façon claire et précise.
- Cet examen est à livre fermé. Il y a des formules aux pages 13 à 16, que vous pouvez détacher, mais laissez les autres pages brochées. Utilisez le verso des pages pour vos calculs. **Indiquez clairement** si vous voulez que je les corrige.
- Matériel permis: crayon ou stylo, calculatrice approuvée par la *Faculty of Engineering* (pour les étudiants en génie). Les assistants numériques (*PDA*s) ou tout autre système de communication sont interdits.
- Mettez vos téléphones cellulaires et appareils électroniques hors circuit.

Si quelque chose n'est pas clair, n'hésitez pas à le demander !

Questions à choix multiple – Encerclez la meilleure réponse

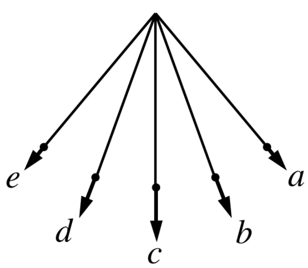
Question 1. [1 point] Une personne a le choix entre pousser ou tirer un traîneau à vitesse constante (voir figure ci-dessous). Supposez qu'il y ait de la friction entre le traîneau et le sol. Si l'angle θ est le même dans les deux cas, quelle situation nécessite une force plus petite?



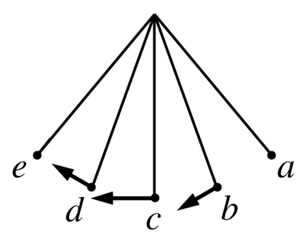
(A) Poussée (figure de gauche).
(B) Traction (figure de droite). *Car la normale est plus petite*
(C) Les deux exigent la même force.
(D) Information insuffisante pour répondre.

Question 2. [1 point] Parmi les figures ci-dessous, laquelle illustre le mieux l'accélération d'un pendule à différents points entre *a* et *e*? Supposez que le pendule soit lâché du repos au point *a*.

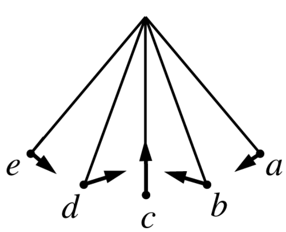
(A)



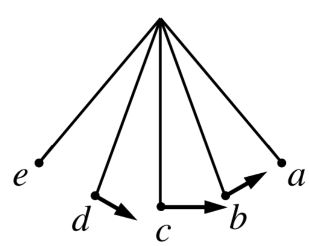
(B)



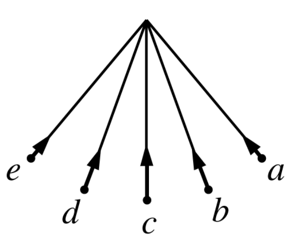
(C)



(D)



(E)



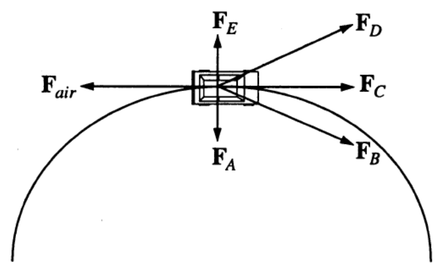
a_t nul au centre, max aux extrémités
a_n max au centre, nul aux extrémités

Question 3. [1 point] Lorsqu'on l'écrit en termes d'unités fondamentales SI, le moment de force a les mêmes unités que

(A) l'accélération angulaire.
(B) la quantité de mouvement.
(C) l'énergie.
(D) la force.
(E) le moment d'inertie.

Question 4. [1 point] La figure ci-dessous montre une automobile roulant à vitesse constante sur une route circulaire dans un plan horizontal. La force de résistance de l'air sur la voiture est le vecteur $\mathbf{F}_{air}$. Parmi les autres forces illustrées, laquelle représente le mieux la force horizontale de la route sur les pneus de la voiture?

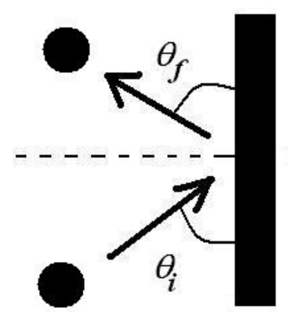
(A) $\mathbf{F}_A$
(B) $\mathbf{F}_B$
(C) $\mathbf{F}_C$
(D) $\mathbf{F}_D$
(E) $\mathbf{F}_E$



Composante vers le centre du cercle (pour créer a_n) et vers la droite (pour annuler F_{air})

Question 5. [1 point] La figure ci-dessous montre, vu *du haut*, une balle qui entre en collision avec le mur à droite. Les flèches indiquent son vecteur vitesse avant et après la collision. Sachant que le coefficient de restitution $e < 1$, entre la balle et le mur, quelle est la relation entre l'angle θ_i avant la collision et l'angle θ_f après la collision?

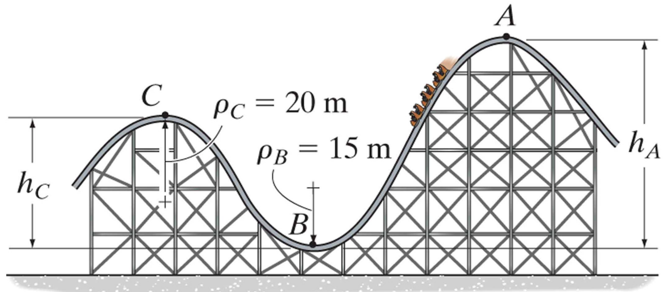
(A) $\theta_i < \theta_f$
(B) $\theta_i = \theta_f$
(C) $\theta_i > \theta_f$
(D) Information insuffisante pour répondre.



v_t ne change pas mais v_n est plus petit après la collision

Question 6. [1 point] Si la voiture ci-dessous part du repos au point A, classez les forces normales exercées sur les passagers aux points A, B et C, de la plus grande à la plus petite.

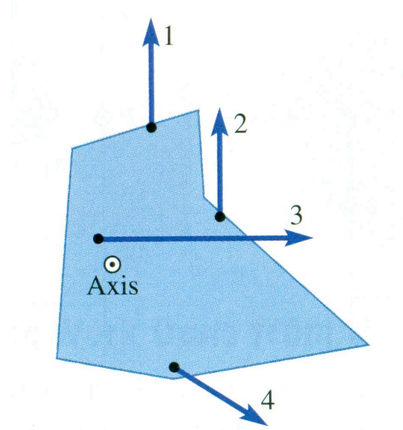
(A) $N_A > N_C > N_B$
(B) $N_B > N_A > N_C$
(C) $N_C > N_B > N_A$
(D) $N_A > N_B > N_C$
(E) $N_B > N_C > N_A$



Utiliser $\sum F_n = m\dfrac{v^2}{r}$ *et* $v_A = 0, v_B > v_C$

Question 7. [1 point] Dans la figure ci-dessous, laquelle des forces génère le plus grand moment de force autour de l'axe de rotation indiqué?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) Aucune de ces réponses.



Comparer les $r_\perp F$

Question 8. [1 point] Si vous lancez une balle vers le haut à une certaine vitesse initiale, elle sera en chute libre et atteindra une hauteur maximale h (mesurée à partir de son point de départ) après avoir quitté votre main. Si vous lancez la balle vers le haut avec le double de la vitesse initiale, quelle sera la nouvelle hauteur maximale?

(A) $\sqrt{2}h$
(B) $2h$
(C) $4h$ *car* $h = \dfrac{v_i^2}{2g}$
(D) $8h$
(E) $16h$

Question 9. [1 point] Une personne se trouve sur la plage ouest d'une rivière qui coule vers le nord à 1.0 m/s. Cette personne peut nager à 2.0 m/s par rapport à l'eau. Dans quelle direction devra-t-elle nager, par rapport à l'eau, si elle veut atteindre directement la plage du côté est (c.-à-d. pour traverser perpendiculairement à la rivière, vu du sol)?

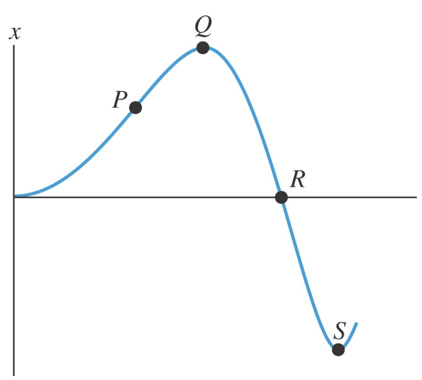
(A) Directement vers l'est.
(B) 27° au sud de l'est.
(C) 30° au sud de l'est. *avec les formules de vitesse relative*
(D) 60° au sud de l'est.
(E) 63° au sud de l'est.

Question 10. [1 point] Une femme de 60.0 kg se tient debout sur un pèse-personne (en anglais, *bathroom scale*) dans un ascenseur en marche. Si l'ascenseur accélère vers le bas à 5.00 m/s^2, quel sera le poids lu sur le pèse-personne? L'accélération due à la gravité est 9.81 m/s^2.

(A) 289 N $N - mg = -ma \rightarrow N = m(g - a)$
(B) 300 N
(C) 389 N
(D) 589 N
(E) 889 N

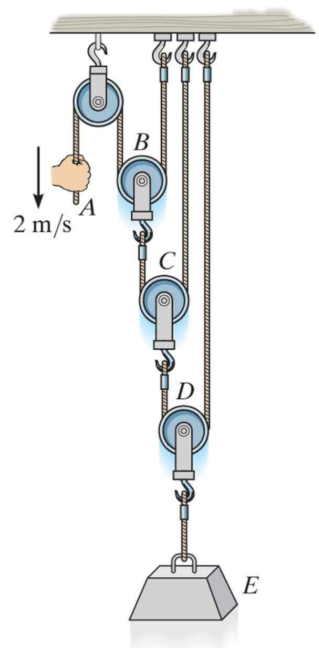
Question 11. [1 point] La figure à droite montre le graphique $x - t$ d'une particule en mouvement. Laquelle, parmi les rangées du tableau, contient seulement des *énoncés vrais* concernant l'accélération dans la direction x à chacun des points P, Q, R et S. (Remarque : P et R sont des points d'inflexion.)

	P	Q	R	S
(A)	positive	zéro	négative	zéro
(B)	zéro	positive	zéro	négative
(C)	zéro	négative	zéro	positive
(D)	positive	positive	zéro	négative
(E)	négative	zéro	positive	zéro



Question 12. [1 point] Considérez le système ci-dessous. Si on tire le câble à *A* vers le bas avec une vitesse de 2.00 m/s, à quelle vitesse le bloc *E* montera-t-il ?

(A) 0.125 m/s
(B) 0.250 m/s
(C) 4.00 m/s
(D) 8.00 m/s
(E) 16.0 m/s



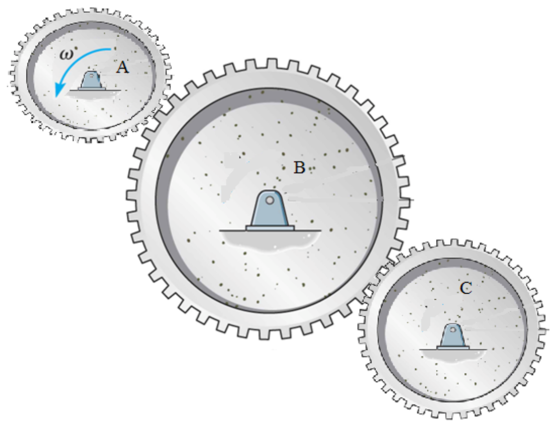
Il y a un facteur 2 entre A et B, entre B et C, et entre C et D, donc un facteur 8 entre A et D.

Question 13. [1 point] Une sphère solide et une coquille cylindrique mince roulent sans glisser sur une surface horizontale. Leurs centres de masse on la même vitesse horizontale $\mathbf{v}_G$. La sphère a deux fois la masse de la coquille cylindrique, mais le même rayon. Ensuite, les deux roulent sans glisser vers le haut d'une pente inclinée à 30° au-dessus de l'horizontale. Lequel de ces deux objets s'arrêtera le plus haut?

(A) La sphère solide.
(B) La coquille cylindrique.
(C) Le deux s'arrêteront à la même hauteur.

Roulement implique $T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)v^2$. *En termes de* m_C, *la masse du cylindre, on trouve que la parenthèse vaut* $\frac{14}{5}m_C$ *pour la sphère, et* $2m_C$ *pour le cylindre. La sphère a donc une plus grande énergie cinétique initiale.*

Question 14. [1 point] La figure ci-dessous montre une partie du système d'engrenages (en anglais, *gear*) d'une imprimante. Si l'engrenage *A* (rayon $r_A = 2$ cm) tourne avec une accélération angulaire constante α_A, quelle est l'accélération angulaire de l'engrenage *C* (rayon $r_C = 4$ cm) si on donne $r_B = 10$ cm ?



Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

(A) $\frac{\alpha_A}{5}$

(B) $\frac{\alpha_A}{2}$

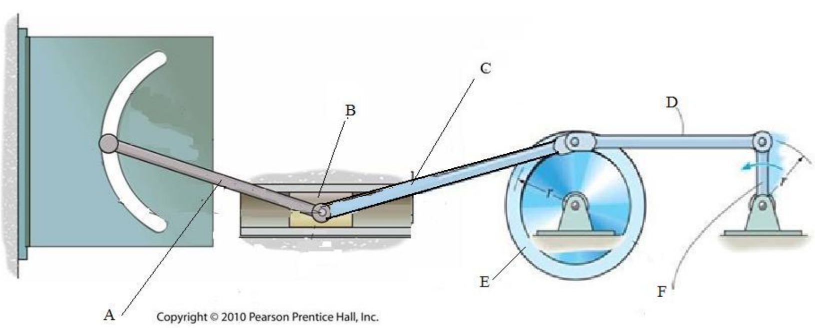
(C) α_A

(D) $2\alpha_A$

(E) $5\alpha_A$

Car $\alpha_C = \frac{R_A}{R_C}\alpha_A$

Question 15. [1 point] Chaque partie du système mécanique ci-dessous subit soit une translation rectiligne, une translation curviligne, une rotation autour d'un axe fixe, ou un mouvement général. Lequel des énoncés suivants concernant le mouvement de ce système mécanique est *faux*?



Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

(A) La tige *A* subit une rotation autour d'un axe fixe. *Mouvement général.*

(B) Le piston *B* subit une translation rectiligne.

(C) La tige *C* subit un mouvement général.

(D) La tige *D* subit une translation curviligne.

(E) Le disque *E* subit une rotation autour d'un axe fixe.

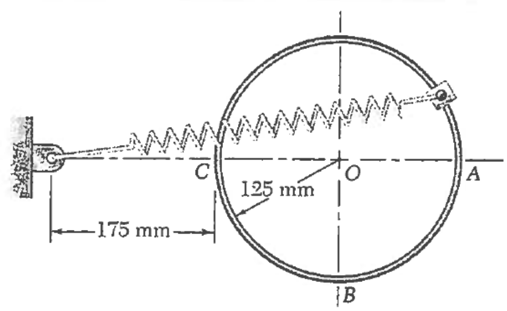
Problèmes

Problème 1. [10 points] Un collet (en anglais, *collar*) de 1.5 kg est attaché à un ressort et glisse sans friction autour d'une tige circulaire qui est dans un plan vertical. Le ressort a une longueur à l'équilibre de 150 mm et une constante $k = 400$ N/m. Sachant que le ressort est lâché de la position A à vitesse nulle, déterminez

A. la vitesse du collet au point B,

B. l'accélération tangentielle du collet au point B, et

C. la force normale exercée par la tige sur le collet au point B. L'accélération due à la gravité est 9.81 m/s^2.



Solution

$s_A = 0.175 + 2 \times 0.125 - 0.150 = 0.275$ **1pt**

$s_B = \sqrt{(0.175+0.125)^2 + (0.125)^2} - 0.150 = 0.175$ **1pt**

A. $T_A + V_A = T_B + V_B$

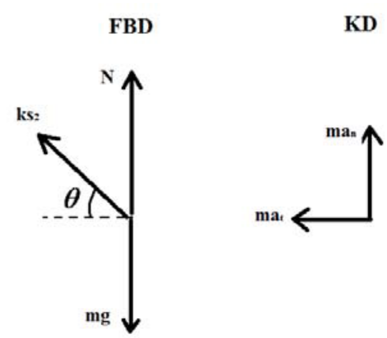
$0 + \frac{1}{2} k s_A^{\ 2} = \frac{1}{2} m v_B^{\ 2} + \frac{1}{2} k s_B^{\ 2} - m g h_B$ **1pt** donne $v_B = 3.80$ m/s **1pt**

B. Sur le diagramme des forces (à droite) nous avons

$\tan\theta = \frac{0.125}{0.300}$ d'où $\theta = 22.6°$ **1pt** et

$m a_t = k s_B \cos\theta$ **1pt**

Nous trouvons $a_t = 43.1$ m/s^2 **1pt**



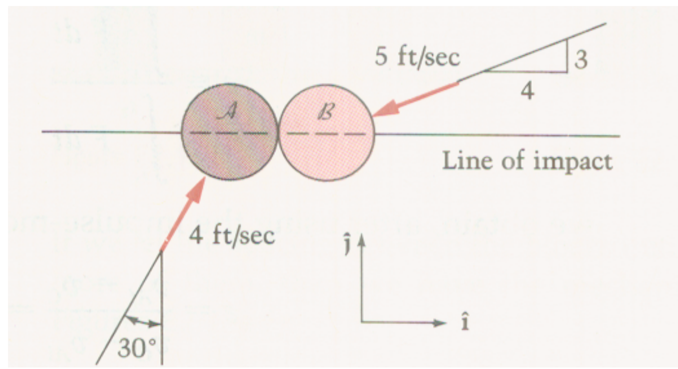
C. Les composantes verticales donnent

$N + k s_B \sin\theta - m g = m a_n = m \frac{v_B^{\ 2}}{\rho}$ où $\rho = 0.125$ **2pts**

$N = m\left(\frac{v_B^{\ 2}}{\rho} + g\right) - k s_B^{\ 2} \sin\theta =$ 161 N **1pt**

Problème 2. [10 points] Deux disques identiques A et B, de masse $m = 0.01$ slug, glissent sans friction sur une surface horizontale puis entrent en collision à la position ci-dessous avec les vitesses indiquées. La droite d'impact est parallèle à l'axe **i**. Le coefficient de restitution est $e = 0.8$.

A. Déterminez les composantes **i** et **j** des vitesses de A et B juste avant la collision.
B. Déterminez la composante **j** des vitesses de A et B juste après la collision.
C. Déterminez la composante **i** des vitesses de A et B juste après la collision.
D. Si l'impact dure 0.001 sec, calculez la grandeur de la force moyenne d'impact.



Solution

A. $\vec{v}_{Ai} = \left(2, 2\sqrt{3}\right)$ ft/s **1pt**

$\vec{v}_{Bi} = \left(-4, -3\right)$ ft/s **1pt**

B. Les composantes $\boldsymbol{j}$ ne changent pas : $v_{Afj} = 2\sqrt{3}$ ft/s **1pt** et $v_{Bfj} = -3$ ft/s **1pt**

C. Pour les composantes $\boldsymbol{i}$, qui sont normales à la ligne d'impact :

$m_A v_{Ain} + m_B v_{Bin} = m_A v_{Afn} + m_B v_{Bfn}$ Les masses s'annulent

$2 - 4 = v_{Afn} + v_{Bfn}$ **1pt**

$e = \dfrac{v_{Bfn} - v_{Afn}}{v_{Ain} - v_{Bin}}$ $\quad 0.8 = \dfrac{v_{Bfn} - v_{Afn}}{2 - (-4)}$ **1pt**

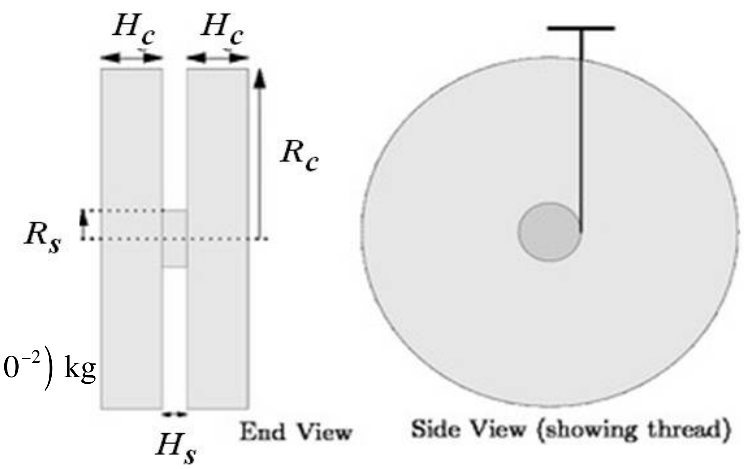
On obtient $v_{Afn} = -3.4$ ft/s **1pt** et $v_{Bfn} = 1.4$ ft/s **1pt**

D. $m_A \vec{v}_{Af} = m_A \vec{v}_{Ai} + \int \vec{F} dt$, $\quad \vec{F}\Delta t = m_A\left(\vec{v}_{Af} - \vec{v}_{Ai}\right)$ **1pt**

En calculant le vecteur force, on trouve que sa grandeur vaut 54 lb **1pt**

Problème 3. [10 points] Un yo-yo en bois est constitué de deux cylindres solides de rayon $R_C = 3.00$ cm et d'épaisseur $H_C = 1.00$ cm, reliés par un moyeu cylindrique de rayon $R_S = 0.500$ cm et d'épaisseur $H_S = 0.200$ cm. La densité du bois est de $0.900\ \text{g/cm}^3$. Un fil de poids et d'épaisseur négligeables est enroulé autour du moyeu. Une personne tient l'autre bout du fil et lâche le yo-yo du repos, de sorte qu'il tourne et tombe à la fois quand le fil se déroule. Il n'y a pas de glissement entre le moyeu et le fil. Combien de temps faut-il avant que le yo-yo tombe d'une hauteur de 1.00 m ?

Solution



Pour chaque disque, $m = \rho H \pi R^2$

ce qui donne
$m_C = 2.54469\left(10^{-2}\right)$ kg
$m_S = 1.4137\left(10^{-4}\right)$ kg **1pt**

Masse totale $m = 2m_C + m_S = 5.1035\left(10^{-2}\right)$ kg
Moment d'inertie:
$I = 2\left(\frac{1}{2} m_C R_C^{\ 2}\right) + \frac{1}{2} m_S R_S^{\ 2}$ **1pt**
$I = 2.290\left(10^{-5}\right)\text{kg m}^2$ **1pt**

Forces : $mg - T = ma$ **1pt**

Moment de force : $TR_S = I\alpha$ **1pt** avec $\alpha = \frac{a}{R_S}$ **1pt**, qui donne $T = \frac{Ia}{R_S^{\ 2}}$

L'équation de Newton devient $mg - \frac{Ia}{R_S^{\ 2}} = ma$ **1pt** ce qui donne

$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{R_S^{\ 2}}} = 0.517636\ \text{m/s}^2$ **1pt**

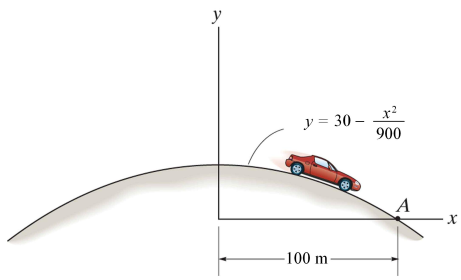
Il reste à utiliser les équations de la cinématique, d'où

$\Delta z = \frac{1}{2} a t^2$ **1pt** $t = \sqrt{\frac{2\Delta z}{a}} = 1.97\ \text{s}$ **1pt**

Problème 4. [10 points] Une automobile roule sur une colline dont la hauteur en fonction de la distance horizontale est décrite par

$$y = 30 - \frac{x^2}{900}$$

Quand l'automobile atteint le point *A*, à la position $x = 100$ m, sa vitesse vaut $v = 80$ km/hr. Les freins sont alors appliqués et les quatre pneus glissent, avec un coefficient de friction cinétique $\mu_k = 0.40$.



A. Dessinez le diagramme des forces et le diagramme de cinétique pour l'automobile quand elle se trouve au point *A*.

B. Calculez la décélération (c.-à-d. le taux de variation de vitesse scalaire) de l'automobile quand elle se trouve au point *A*.

Solution

A. Forces : $m\mathbf{g}$ vers le bas, **N** vers le haut perpendiculaire à l'auto, $\mathbf{F}_f$ vers l'arrière parallèle à l'auto. **2pt**

Accélération : $\mathbf{a}_t$ vers l'arrière parallèle à l'auto, $\mathbf{a}_n$ vers le bas à gauche. **1pt**

B. Équations du mouvement :

$ma_t = F_f - mg\sin\theta$ **1pt** avec $F_f = \mu_k N$

$ma_n = mg\cos\theta - N$ **1pt** d'où $F_f = \mu_k\left(mg\cos\theta - \frac{mv^2}{\rho}\right)$

On trouve $a_t = -g\sin\theta + \mu_k\left(g\cos\theta - \frac{v^2}{\rho}\right)$

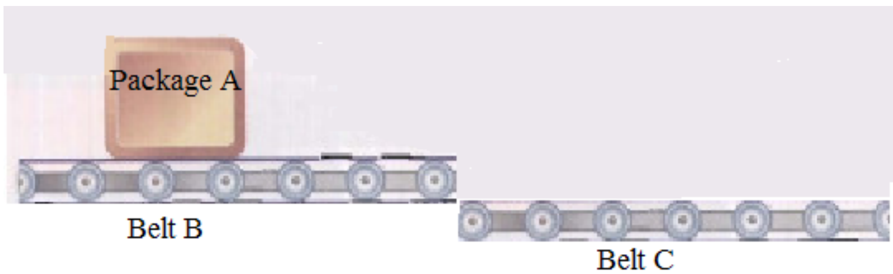
$v = 80$ km/hr $\times$ 1000 m/km $\times$ 1hr/3600 s $=$ 22.2 m/s **1pt**

$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9}$ qui donne $\theta = 12.5°$ **1pt**

$$\rho = \frac{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}{|y''|} = 484 \text{ m}$$ **1pt**

En remplaçant dans a_t on trouve $a_t = 1.30$ m/s^2 **2pts**

Problème 5. [10 points] Un paquet A, de poids égal à 10 lb, se déplace avec la courroie (en anglais, *conveyor belt*) B à une vitesse constante. Le paquet A quitte la courroie B et atterrit sur la courroie C, de poids égal à 40 lb. La courroie C est initialement au repos, mais peut se déplacer horizontalement. Immédiatement après avoir atterri sur C, le paquet A a une vitesse horizontale de 20 ft/s et la courroie C a une vitesse nulle. Calculez le *temps* et la *distance* que le paquet A parcourt avant de s'arrêter par rapport à la courroie C. Le coefficient de frottement cinétique entre toutes les surfaces vaut $\mu_k = 0.4$.



Solution

Juste avant l'impact, $v_{A0} = 20$ ft/s et $v_{C0} = 0$ ft/s . Au moment où A s'arrêtera par rapport à C (mais par p/r au sol !), les deux auront une vitesse commune v.
Par conservation de quantité de mouvement : $m_A v_{A0} + m_C v_{C0} = (m_A + m_C)v$ **2.5pts**
ce qui donne $v = 4$ ft/s **0.5pt**

Par la suite, nous ne considérons que le paquet A. Le théorème de l'impulsion donnera le temps d'arrêt et le théorème de l'énergie cinétique donnera la distance.

Théorème de l'impulsion : $m_A v = m_A v_{A0} + F\Delta t$ avec $F = -\mu_k m_A g$ ($g = 32.2$ ft/s^2!) **3pts**

On trouve $\Delta t = 1.24$ s **0.5pt**

Théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}m_A v^2 - \frac{1}{2}m_A v_{A0}{}^2 = -\mu_k m_A g d$ **3pts**

On trouve $d = 14.9$ ft **0.5pt**

Bonnes vacances!

Fundamental Equations of Dynamics

KINEMATICS

Particle Rectilinear Motion

Variable a	*Constant $a = a_c$*
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\, ds = v\, dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Particle Curvilinear Motion

x, y, z Coordinates		*r, θ, z Coordinates*	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n, t, b Coordinates

$v = \dot{s}$	$a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$
	$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ $\quad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{\lvert d^2y/dx^2 \rvert}$

Relative Motion

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

Rigid Body Motion About a Fixed Axis

Variable α	*Constant* $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

For Point P

$s = \theta r \qquad v = \omega r \qquad a_t = \alpha r \qquad a_n = \omega^2 r$

Relative General Plane Motion—Translating Axes

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pin})} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{pin})}$

Relative General Plane Motion—Trans. and Rot. Axis

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICS

Mass Moment of Inertia $\quad I = \int r^2\, dm$

Parallel-Axis Theorem $\quad I = I_G + md^2$

Radius of Gyration $\quad k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

Equations of Motion

Particle	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Rigid Body (Plane Motion)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

Principle of Work and Energy

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetic Energy

Particle	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Rigid Body (Plane Motion)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

Work

Variable force	$U_F = \int F\cos\theta\, ds$
Constant force	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Weight	$U_W = -W\,\Delta y$
Spring	$U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Couple moment	$U_M = M\,\Delta\theta$

Power and Efficiency

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \epsilon = \dfrac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \dfrac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}}$

Conservation of Energy Theorem

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potential Energy

$V = V_g + V_e$, where $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

Principle of Linear Impulse and Momentum

Particle	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$
Rigid Body	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Conservation of Linear Momentum

$\Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_2$

Coefficient of Restitution $\quad e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

Principle of Angular Impulse and Momentum

Particle	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$ where $H_O = (d)(mv)$
Rigid Body (Plane motion)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\, dt = (\mathbf{H}_G)_2$ where $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$ where $H_O = I_O\omega$

Conservation of Angular Momentum

$\Sigma(\text{syst. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{syst. } \mathbf{H})_2$

APPENDIX

A Mathematical Expressions

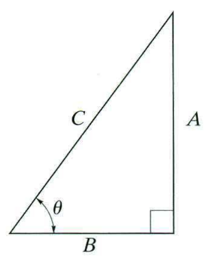
Quadratic Formula

If $ax^2 + bx + c = 0$, then $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Hyperbolic Functions

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

Trigonometric Identities



$\sin\theta = \dfrac{A}{C}, \csc\theta = \dfrac{C}{A}$

$\cos\theta = \dfrac{B}{C}, \sec\theta = \dfrac{C}{B}$

$\tan\theta = \dfrac{A}{B}, \cot\theta = \dfrac{B}{A}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}, \sin\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

Power-Series Expansions

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \qquad \cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$

Derivatives

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u\frac{du}{dx}$$

Integrals

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}}\right] + C,\ ab<0$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C,\ ab>0$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C,\ a^2>x^2$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right] + C,\ a>0$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C,\ a>0$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\right] + C$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2\pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2\pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C,\ c>0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C,\ c>0$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax) + C$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin(ax) + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

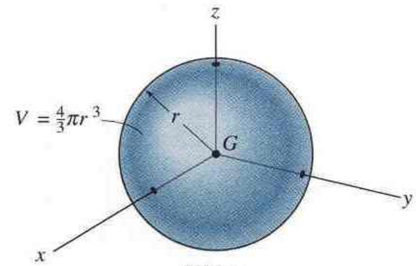
$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

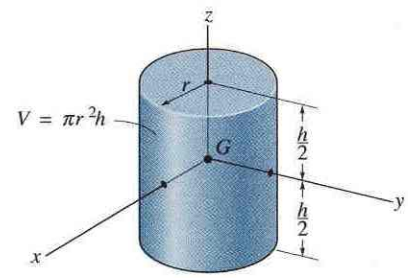
A

Center of Gravity and Mass Moment of Inertia of Homogeneous Solids



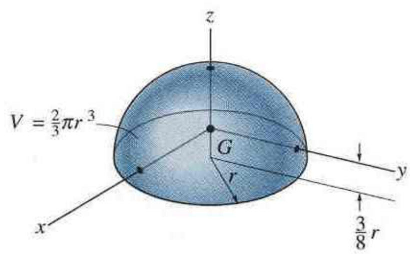
Sphere

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} mr^2$



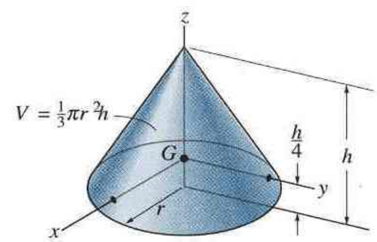
Cylinder

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m(3r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{1}{2} mr^2$



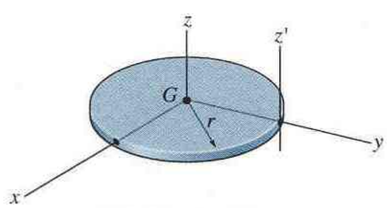
Hemisphere

$I_{xx} = I_{yy} = 0.259mr^2 \quad I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$



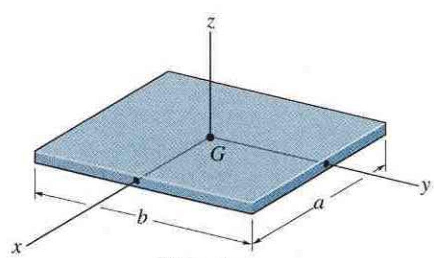
Cone

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80} m (4r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$



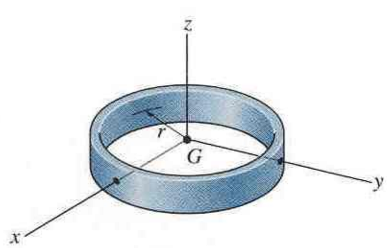
Thin Circular disk

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} mr^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{z'z'} = \frac{3}{2} mr^2$



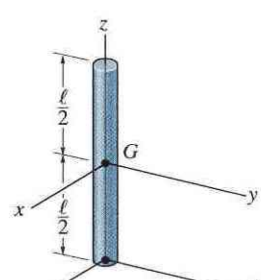
Thin plate

$I_{xx} = \frac{1}{12} mb^2 \quad I_{yy} = \frac{1}{12} ma^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$



Thin ring

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} mr^2 \quad I_{zz} = mr^2$



Slender Rod

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m\ell^2 \quad I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{3} m\ell^2 \quad I_{z'z'} = 0$