Examen final 2023 de PHYSQ 131

Samedi, 15 avril, de 9 h à 11 h 30 (9:00-11:30 pm)
Faculté Saint-Jean, local 366 (comme le cours)
Entrée principale ouverte (en principe! Sinon mdemonti@ualberta.ca)

https://sites.ualberta.ca/~mdemonti/physq131.html
contient info, anciens examens, ces notes de révision, aide mémoire (4 pages suivantes), etc.
Matière: tous les chapitres, séminaires, anciens devoirs/exercices facultatifs

Votre examen sera en français. J'aurai une copie de l'examen en anglais si vous voulez vérifier certaines questions.

Gérez bien votre temps en fonction des points!

Si vous voulez vos notes (sauf peut-être les labs), écrivez-moi et je vous enverrai les fichiers Numbers/Excel de vos notes.

Votre note/lettre finale sera calculée par le plus avantageux entre le barème du plan de cours ou la courbe de tous les groupes de EN PH 131. (La correction de l'examen peut prendre beaucoup de temps...)

Fundamental Equations of Dynamics

KINEMATICS

Particle Rectilinear Motion

Variable a	Constant $a = a_c$
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Particle Curvilinear Motion

x, y, z Coordinates		*r, θ, z Coordinates*	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n, t, b Coordinates

$v = \dot{s}$ $\qquad a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \qquad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relative Motion

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

Rigid Body Motion About a Fixed Axis

Variable α	Constant $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

For Point P

$s = \theta r \qquad v = \omega r \qquad a_t = \alpha r \qquad a_n = \omega^2 r$

Relative General Plane Motion—Translating Axes

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pin})} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{pin})}$

Relative General Plane Motion—Trans. and Rot. Axis

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICS

Mass Moment of Inertia $\quad I = \displaystyle\int r^2\,dm$

Parallel-Axis Theorem $\quad I = I_G + md^2$

Radius of Gyration $\quad k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

Equations of Motion

Particle	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Rigid Body (Plane Motion)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

Principle of Work and Energy

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

Kinetic Energy

Particle	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Rigid Body (Plane Motion)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

Work

Variable force	$U_F = \displaystyle\int F\cos\theta\,ds$
Constant force	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Weight	$U_W = -W\,\Delta y$
Spring	$U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Couple moment	$U_M = M\,\Delta\theta$

Power and Efficiency

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \varepsilon = \dfrac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \dfrac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}}$

Conservation of Energy Theorem

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potential Energy

$V = V_g + V_e$, where $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

Principle of Linear Impulse and Momentum

Particle	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Rigid Body	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Conservation of Linear Momentum

$\Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_2$

Coefficient of Restitution $\quad e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

Principle of Angular Impulse and Momentum

Particle	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ where $H_O = (d)(mv)$
Rigid Body (Plane motion)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ where $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ where $H_O = I_O\omega$

Conservation of Angular Momentum

$\Sigma(\text{syst. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{syst. } \mathbf{H})_2$

APPENDIX A

Mathematical Expressions

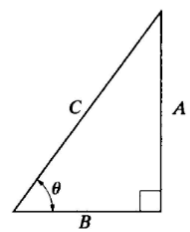
Quadratic Formula

If $ax^2 + bx + c = 0$, then $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Hyperbolic Functions

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

Trigonometric Identities



$\sin\theta = \dfrac{A}{C}, \csc\theta = \dfrac{C}{A}$

$\cos\theta = \dfrac{B}{C}, \sec\theta = \dfrac{C}{B}$

$\tan\theta = \dfrac{A}{B}, \cot\theta = \dfrac{B}{A}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}, \sin\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

Power-Series Expansions

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \qquad \cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$

Derivatives

$\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

$\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u\dfrac{du}{dx}$

Integrals

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}}\right] + C,\ ab < 0$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C, ab > 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C, a^2 > x^2$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right] + C, a > 0$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right] + C$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C, c > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C, c > 0$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax) + C$$

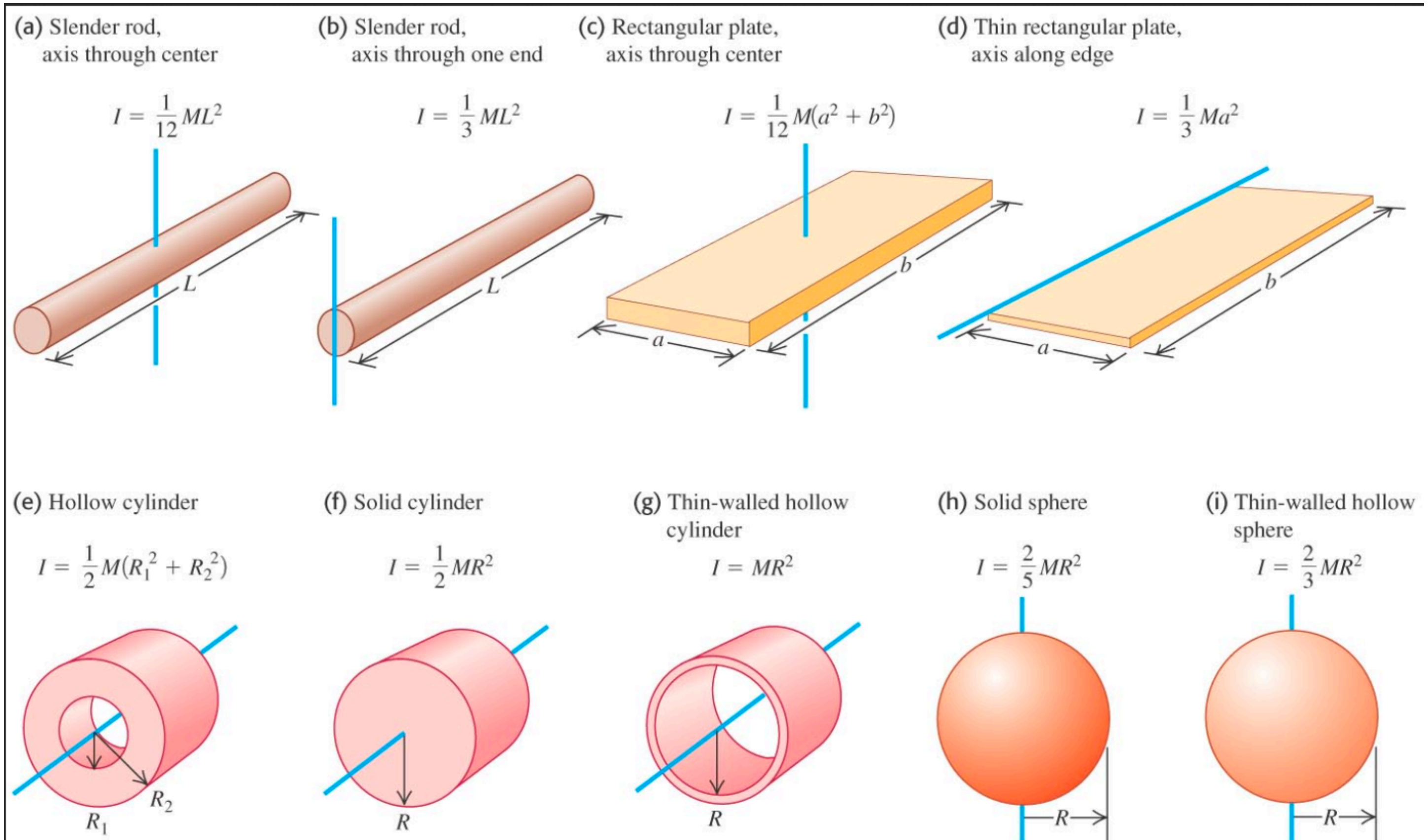
$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin(ax) + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Attention aux “erreurs stupides”!

Calculatrice en degrés ou radians, signes, sin ou cos, vitesse (vectorielle) ou grandeur de la vitesse (*speed*)

Calculs simples, algèbre, arithmétique

$g = 9.81$ m/s^2 ou 32.3 pi/s^2

pi = ft, po = in,

$m = W/g$, $I = mk^2 = (W/g)\,k^2$, k (rayon de giration) en pi,

I en slug·pi^2 (en fps)

Si $\int F\mathrm{d}t$ = aire, attention si $F < 0$

Théorème de l’impulsion: signe de v_f si opposé à $\mathbf{v}_\mathrm{i}$

Pour, par ex. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathrm{n} + \mathbf{v}_\mathrm{t}$ alors v tient compte de $\mathbf{v}_\mathrm{n}$ et $\mathbf{v}_\mathrm{t}$

PHYSQ 131 - B. Cinématique rectiligne d'une particule à une dimension

H Sec. 12.1-3

W Sec. 2.1-6

Cas de l'accélération constante $a = a_c$

Prenons $t_i = 0$, $x_i = x_0$, $v_i = v_0$, $t_f = t$, $x_f = x$, et $v_f = v$

$$v = v_0 + a_c t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2a_c (x - x_0)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\left(v + v_0\right) t$$

Ne pas utiliser si **a** n'est pas constante! **Valide si les forces sont constantes.**

La définition de l'accélération nous donne aussi

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = \int_{t_i}^{t_f} a\,dt \quad \Rightarrow \quad v_f = v_i + \int_{t_i}^{t_f} a\,dt \text{ ou } \int_{t_i}^{t_f} dt = \int_{v_i}^{v_f} \frac{dv}{a}$$

La définition de la vitesse nous donne

$$\int_{x_i}^{x_f} dx = \int_{t_i}^{t_f} v\,dt \quad \Rightarrow \quad x_f = x_i + \int_{t_i}^{t_f} v\,dt \text{ ou } \int_{t_i}^{t_f} dt = \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{v}$$

La dernière relation de la page précédente conduit à

$$\int_{v_i}^{v_f} v\,dv = \int_{x_i}^{x_f} a\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \int_{x_i}^{x_f} a\,dx \text{ ou } \int_{x_i}^{x_f} dx = \int_{v_i}^{v_f} \frac{v dv}{a}$$

Les relations ci-dessus sont valides pour a quelconque, c.-à-d. pas nécessairement constante. Mouvement curviligne: les variables sont dans la direction tangentielle (ex. $v\mathrm{d}v = a_t\mathrm{d}s$)

PHYSQ 131 - C. Cinématique d'une particule à deux dimensions

H Sec. 12.4-7,9,10

HRW Sec. 4.1-7

[Les exemples sont tirés de la 12è édition de Hibbeler]

Mouvement curviligne: coordonnées cartésiennes

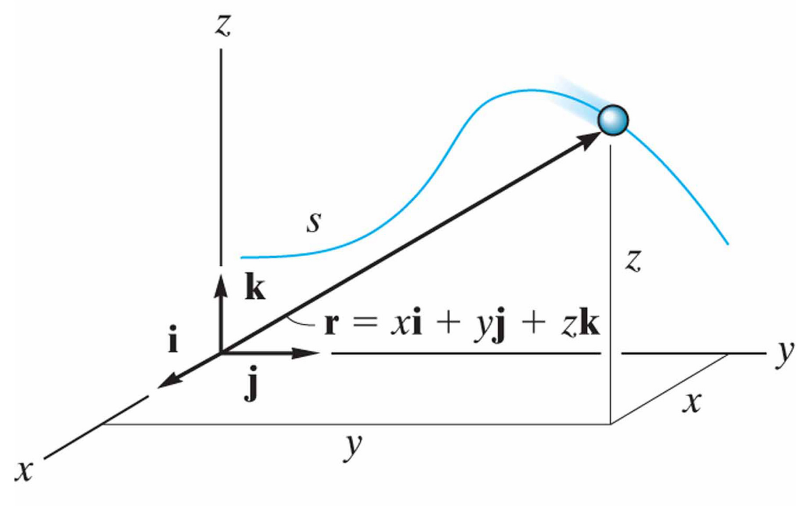
Position

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

En général, $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

Grandeur de **r** : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Direction de **r** : $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/\mathrm{r}$ ou $\hat{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$



Position

(a)

fig12_17a.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

Mouvement curviligne: composantes normale et tangentielle

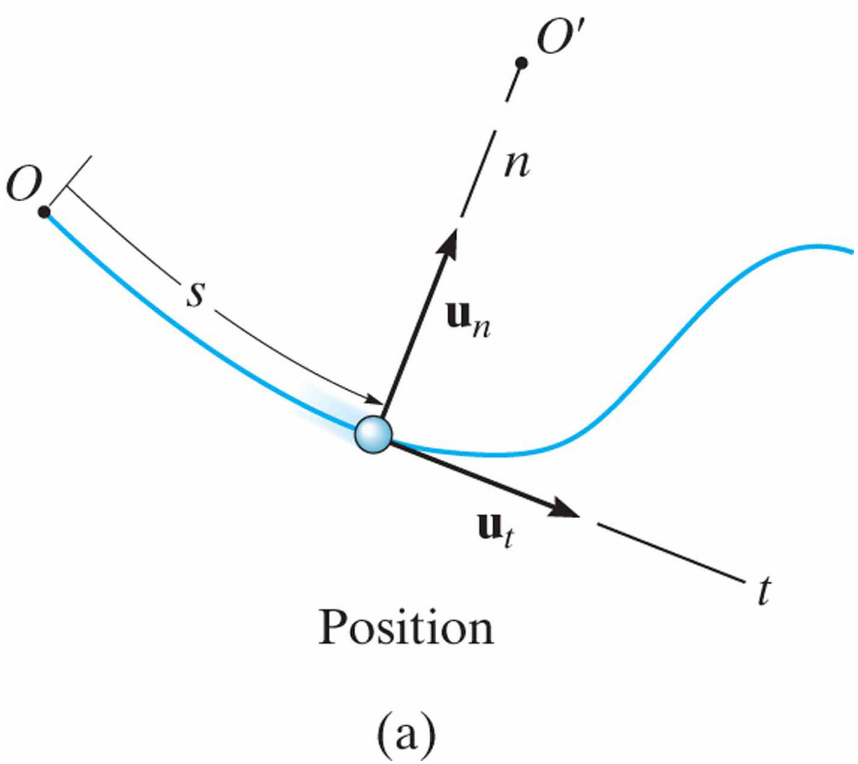


fig12_24a.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

$\mathbf{u}_t$ est *tangent* à la trajectoire, et parallèle à la vitesse:
$\mathbf{u}_t = \mathbf{v}/v$

$\mathbf{u}_n$ lui est *perpendiculaire* (n signifie *normal*)
Donc, identifiez bien la trajectoire!

O' est le *centre de courbure*

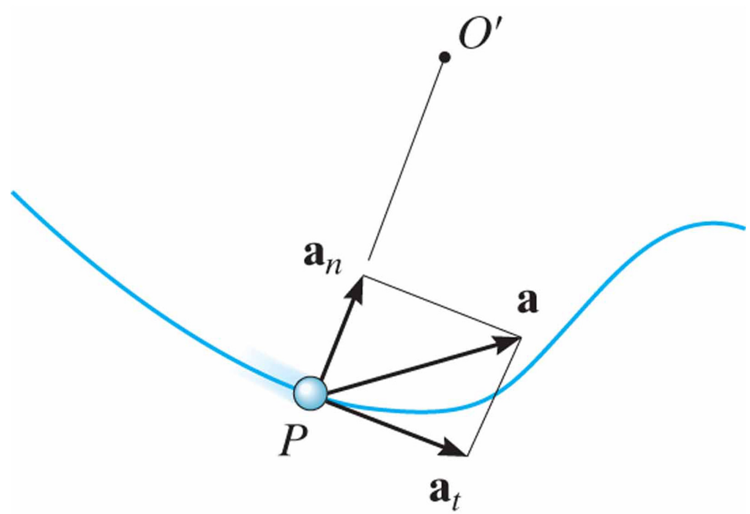
$\mathbf{u} = \hat{u}$

Par conséquent, $\dot{\hat{u}}_t = \dot{\theta}\hat{u}_n = \dfrac{v}{\rho}\hat{u}_n$

et notre équation pour l'accélération devient

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{u}_t + v\,\dot{\hat{u}}_t$$
$$= a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$$
$$\vec{a} = \dot{v}\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n$$

Est-ce que a_n est familier?



Acceleration

(f)

fig12_24f.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

Remarques

$$a_t = \dot{v} \text{ implique que } a_t ds = v dv$$

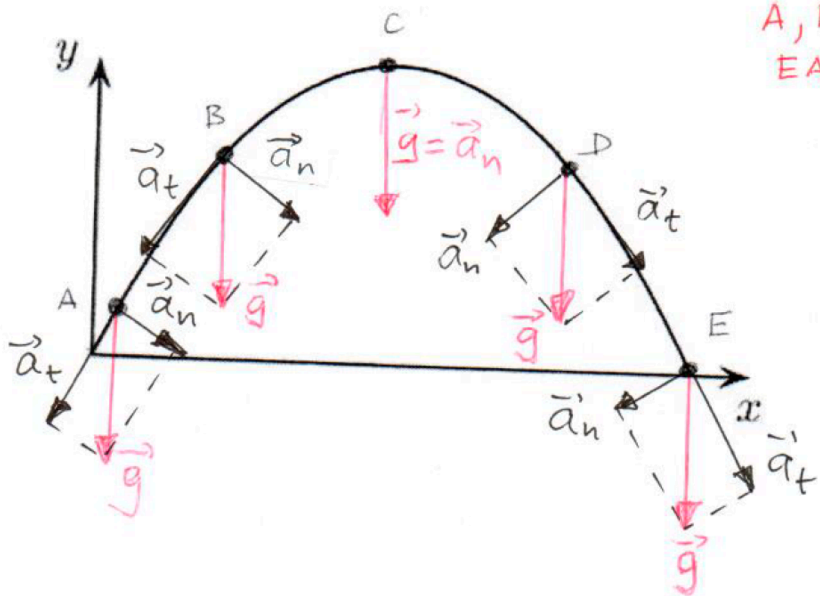
$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2}$$

L'angle de **a** par rapport à $\mathbf{a}_t$ est donné par $\tan\theta = \dfrac{a_n}{a_t}$

Si le parcours de l'objet suit une courbe $y = f(x)$, alors le rayon de courbure ρ en tout point du parcours est donné par (voir Thomas, *Calculus*, Section 13.4 et l'exercice #5.)

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}{|y''|}$$

Exemple, ancien séminaire



A, B, C, D, E
EACH [1 POINT] ⇒ [5 POINTS] TOTAL

TANGENTIAL ACCELERATION

a_t : E > A > B = D > C [1 POINT]

NORMAL ACCELERATION

a_n : C > B = D > A > E [1 POINT]

Mouvements liés de plusieurs particles

Certains systèmes contiennent des contraintes (par ex. corde) qui font que les variables cinématiques d'un objet dépendent des variable cinématiques d'autres objets.

Datum : point de référence fixe

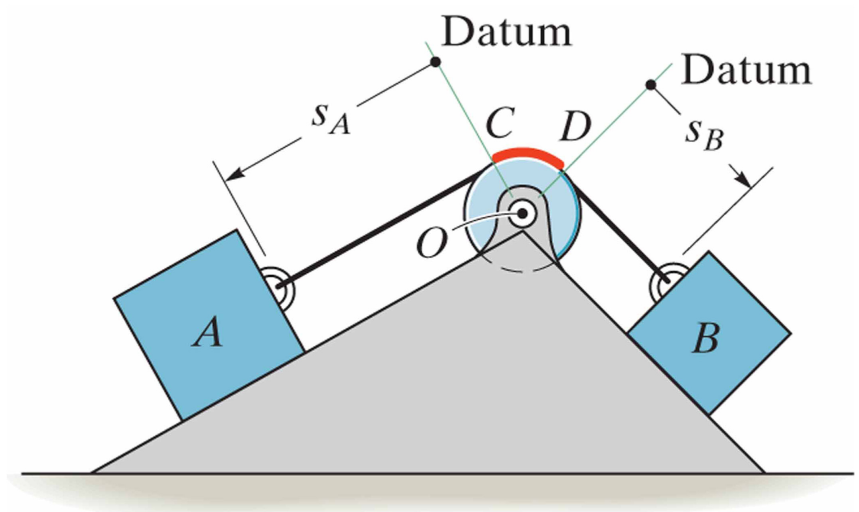


fig12_36.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

Attention que le datum soit bien un point FIXE (ex. pas une poulie mobile)!

Mouvement relatif de plusieurs particles

$\mathbf{r}_{B/O} = \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{r}_{A/O}$

(sur le dessin, $\mathbf{r}_{B/O} = \mathbf{r}_B$ et $\mathbf{r}_{A/O} = \mathbf{r}_A$)

$\mathbf{v}_{B/O} = \mathbf{v}_{B/A} + \mathbf{v}_{A/O}$

$\mathbf{a}_{B/O} = \mathbf{a}_{B/A} + \mathbf{a}_{A/O}$

Remarque $\mathbf{r}_{A/B} = -\mathbf{r}_{B/A}$

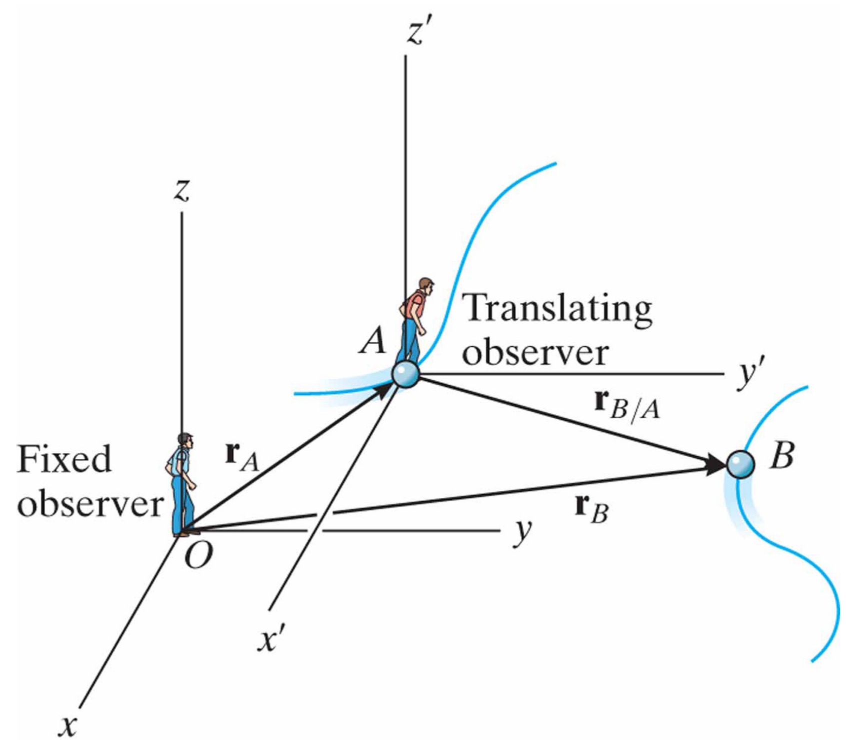


fig12_42.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

PHYSQ 131 - D. Dynamique d'une particule et d'un système de particules

H Sec. 13.1-5

HRW Sec. 5.1-3,6.1-3

[Les exemples sont tirés de la 12è édition de Hibbeler]

Dans tous les chapitres qui suivent, plusieurs problèmes impliquent de

- bien tracer un diagramme des forces (et diagramme cinétique)
- attention aux directions des forces, par ex. friction
- écrire les équations de Newton (selon le cas, avec $\sum\tau = I\alpha$)
- sans oublier des équations auxiliaires: $a = \alpha r$, $f = \mu N$, etc.
- identifier la quantité à calculer et les variables connues
- les étapes ci-dessus peuvent être utilisées dans des problèmes de conservation d'énergie
- faites attention aussi à la direction de $\mathbf{a}$, parfois exprimé par des $\mathbf{a}_t$ et $\mathbf{a}_n$.

Deuxième loi de Newton

La force totale sur un objet cause une accélération **a** donnée par

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Coordonnées cartésiennes (H Sec.13.4)

$$\sum F_x = ma_x,\ \sum F_y = ma_y,\ \sum F_z = ma_z$$

Forces: poids, tension, normale, force externe, friction, etc.

Faites un bon diagramme des forces (avec les bonnes directions de forces!). Il peut être utile de détailler $\sum$ **F**.

Troisième loi de Newton

Les forces viennent *en paires*. Pour toute force exercée sur un objet, cet objet exerce une force égale et opposée sur la source de cette force: c'est parfois appelé le *principe d'action – réaction*.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Exemple. Tirer avec une force **F** sur une corde ou un ressort attaché à un mur vs. une force **F**' exercée à l'autre extrémité à la place du mur: on a alors $F' = F$.

Coordonnées normale/tangentielle/binormale

Nous avons $$\sum F_t = ma_t, \ \sum F_n = ma_n, \ \sum F_b = 0$$

Trajectoire dans un plan défini par $\mathbf{u}_t$ et $\mathbf{u}_n$. Attention: **N** vers $\mathbf{u}_n$

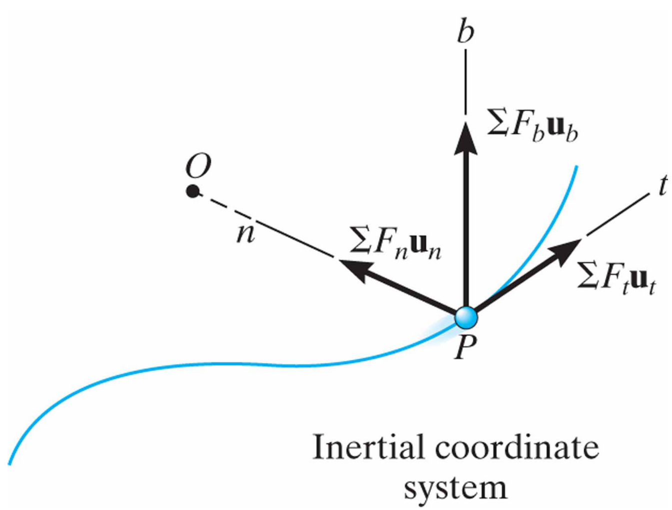


fig13_11.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

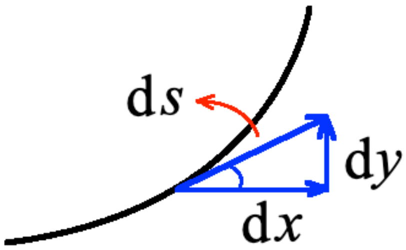
$\mathbf{u}_n$ pointe vers le centre de courbure

Binormale $\hat{u}_b = \hat{u}_t \times \hat{u}_n$

Attention aux axes!

Si on doit utiliser $a_t\mathrm{d}s = v\mathrm{d}v$, la relation suivante entre ds, dx et dy peut être utile, par ex. si on demande la vitesse à une position donnée par x ou y.

Du diagramme ci-conte, on voit que $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$



qui est donné par la dérivé $y' = f'(x)$ en un point donné.

De la relation

$$y' = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

on obtient

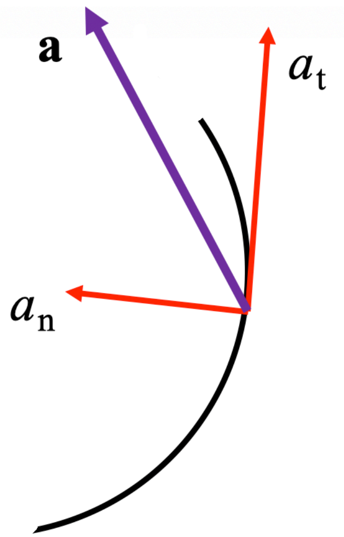
$$\sin\theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

On voit aussi que $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1+y'^2\right)$

d'où le changement de variable $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

La relation $a^2 = a_t^2 + a_n^2$ peut être utilisé de plusieurs façons. Par exemple, connaissant a et a_t, on peut calculer v de $a_n = v^2 / \rho$.

Ex. auto vue du haut, sur une trajectoire courbe dans un plan horizontal, $\mathbf{a} \propto \mathbf{f}_S$



Comme d'habitude, $f_S = \mu_S N$, avec $\mathbf{N}$ calculé avec les composantes verticales.

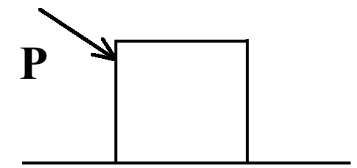
FBD = Free-body diagram = diagrammes des forces

KD = Kinetic diagram = diagramme cinétique. Indiquez la direction de l'accélération **a** ou, selon le cas, ses composantes $\mathbf{a}_n$ et $\mathbf{a_t}$

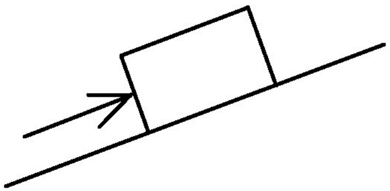
Pas de questions sur le centre de masse!

Friction

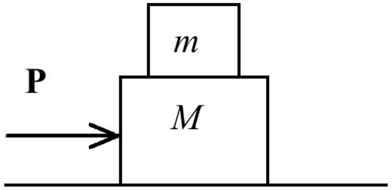
P vs friction statique, cinétique, etc.



Accélération ?



P max avant que *m* ne glisse?



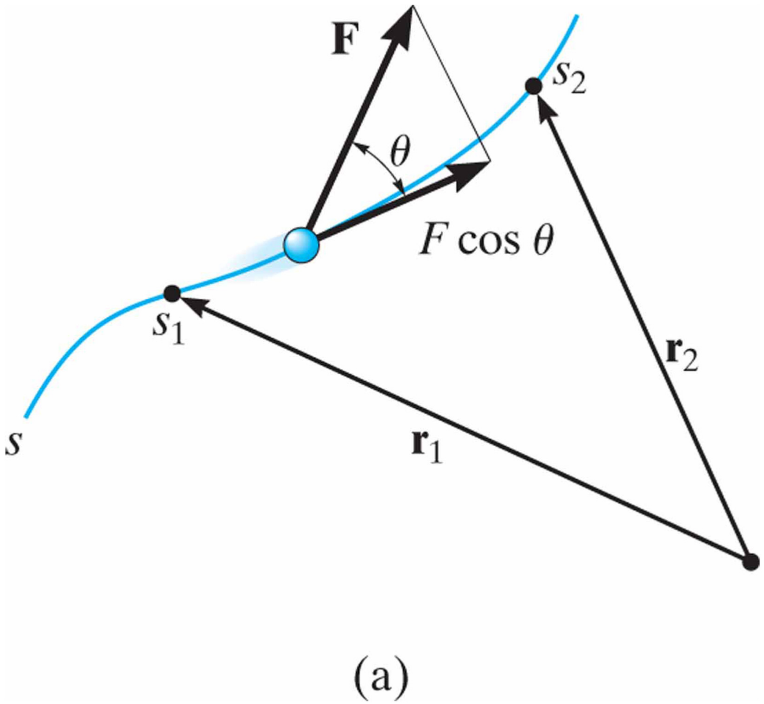
PHYSQ 131 - E. Travail et énergie

H Sec. 14.1-6

HRW Sec. 7.1-6, 8.1-5

[Les exemples sont tirés de la 12è édition de Hibbeler]

Force variable, déplacement fini



(a)

fig14_02a.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\left(\vec{r}\right) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} F \cos\theta \, ds$$

Force conservative : si U_{12} ne dépend pas du parcours
Force non-conservative : si U_{12} dépend du parcours

Théorème de l'énergie cinétique – système de particules

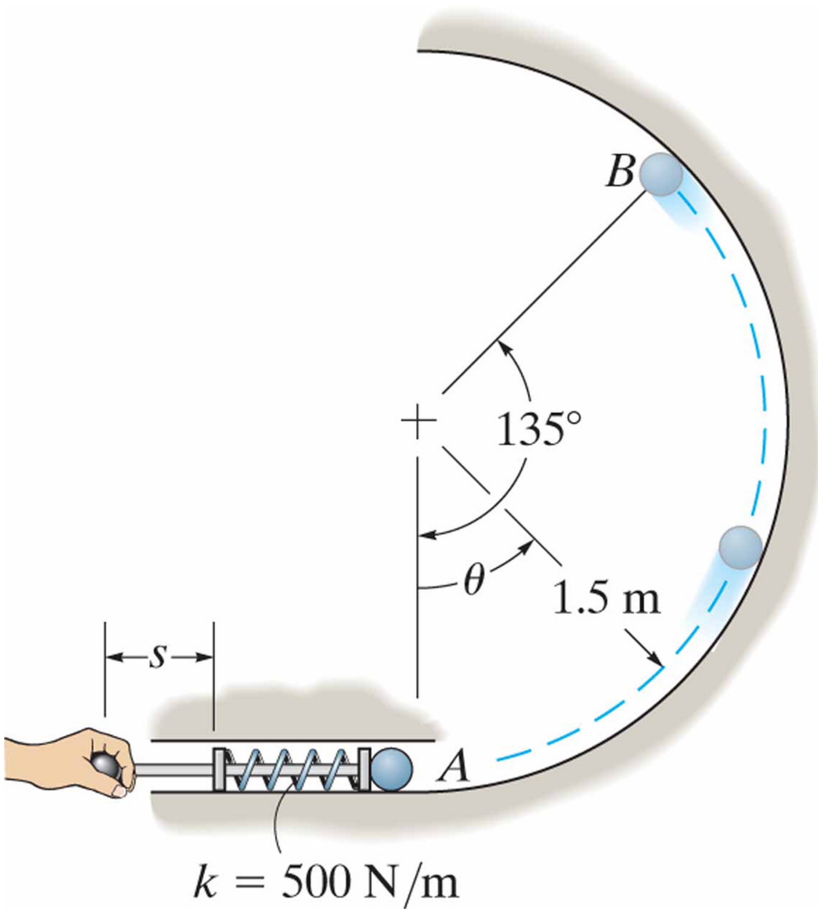
$$\sum T_2 - \sum T_1 = \sum U_{1-2}$$

Côté gauche - Σ représente la *somme sur les particules*

Côté droit - Σ représente *deux sommes* : sur les *particules* et, pour chaque particule, sur *toutes les forces* qui agissent sur elle.

Attention quand on demande le travail U_F par une force F sur le système: certaines contributions (ex. tension) peuvent s'annuler.

H 14-21. Prenez $m_{\text{balle}} = 0.5$ kg. Le piston compresse le ressort de 0.08 m quand $s = 0$. De quelle distance s le piston doit-il être tiré puis lâché pour que la balle quitte la piste à $\theta = 135°$?



PROB14_021.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

Exemple qui mélange la conservation de l'énergie et $\sum F_n = ma_n = mv^2/\rho$

Puissance = taux auquel un travail est effectué

$$P = \frac{dU}{dt}$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v}$$

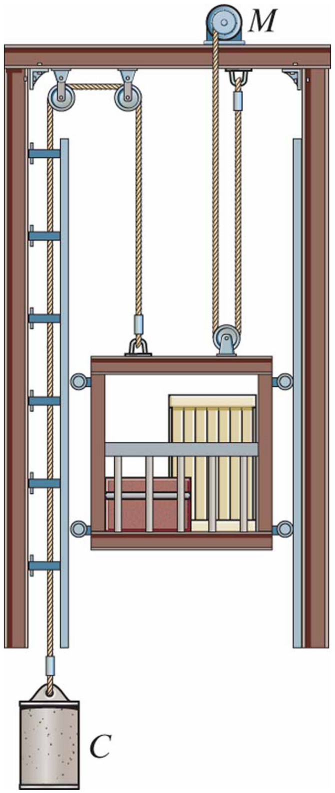
Unité: 1 watt (W) = 1 J/s =1 N m/s

1 cheval-vapeur (*horsepower* hp) = 550 ft lb/s

Efficacité

$$\varepsilon = \frac{\text{puissance de sortie}}{\text{puissance a l'entree}} < 1$$

H 14-52. La cage de l'ascenseur et son contenu ont une masse totale de 800 kg et le contrepoids *C*, 150 kg. Si la vitesse de la cage est vers le haut et croît de façon constante de 0.5 m/s à 1.5 m/s en 1.5 s, quelle est la puissance moyenne générée par le moteur *M* pendant ce temps? Prenez $\varepsilon = 0.8$.



PROB14_052.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

a constante

On a utilisé $P_{sortie} = 2T\, v_{ascenseur}$ et nous aurions pu utiliser $P_{sortie} = T\, v_{corde}$ pour un point de la corde proche de *M*, car $v_{corde} = 2\, v_{ascenseur}$

Énergie potentielle

À toute force conservative F_C on peut associer une ***énergie potentielle***, définie comme *le travail effectué par* F_C *pour aller de* 1 *à* 2*, multiplié par* -1 :

$$\Delta V = V_2 - V_1 \equiv -\left(U_C\right)_{1-2}$$

L'énergie potentielle est aussi définie par le travail par *une force externe,* F_{ext} *, pour aller de* 1 *à* 2 :

$$\Delta V = V_2 - V_1 \equiv \left(U_{ext}\right)_{1-2}$$

Énergie potentielle gravitationnelle

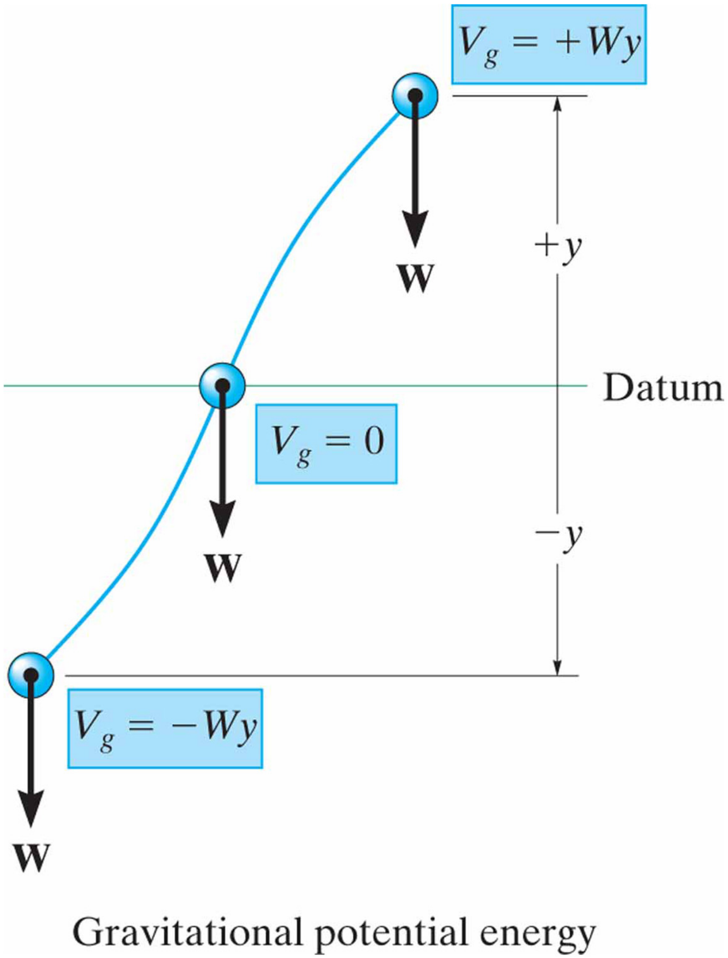


fig14_17.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$V_g = Wy$$
$$= mgy$$

Énergie potentielle élastique (ressort)

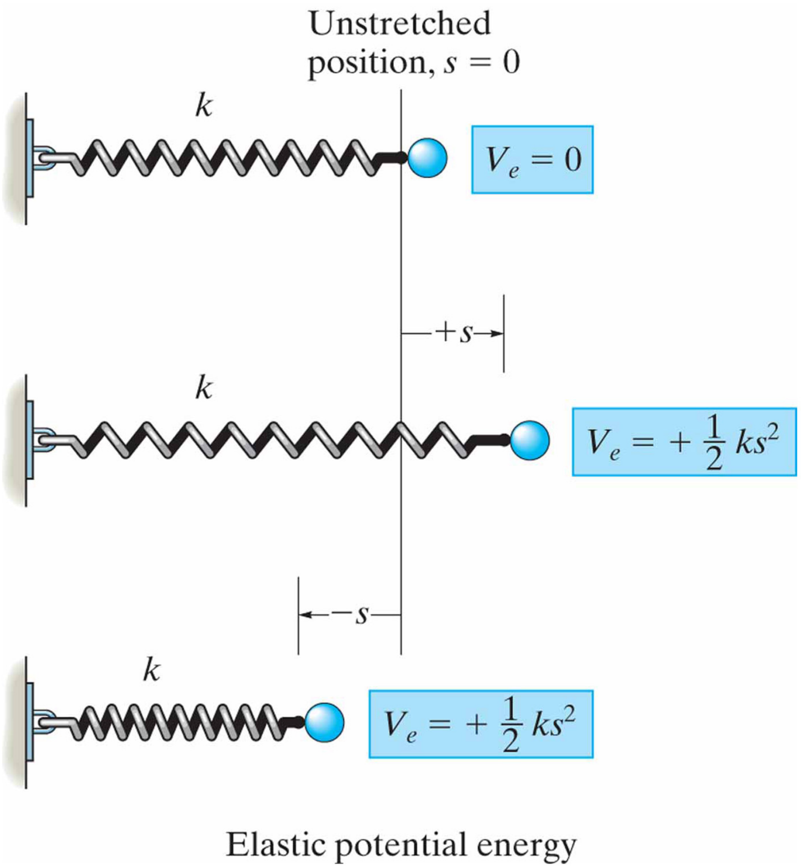


fig14_18.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2$$

***s* mesuré de la position d'équilibre**

Conservation de l’énergie mécanique totale

$$T_2 - T_1 = \sum U_{1-2}$$

$$= \sum (U_C)_{1-2} + \sum (U_{NC})_{1-2}$$

$$= V_1 - V_2 + \sum (U_{NC})_{1-2}$$

$$\Delta T + \Delta V = \sum (U_{NC})_{1-2}$$

Énergie mécanique totale

$$E \equiv T + V$$

$$\Delta E = E_f - E_i = \sum (U_{NC})_{1-2}$$

En l'absence de friction, $U_{NC} = 0$, et

$$E_f = E_i$$

comme vous l'avez appris en "maternelle"...

PHYSQ 131 - F. Impulsion et quantité de mouvement

H Sec. 15.1-4

HRW Sec. 9.1-9

[Les exemples sont tirés de la 12è édition de Hibbeler]

Notation

Quantité de mouvement (*linear momentum*)

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}$$ (dans Hibbeler. HRW utilise **p**)

Impulsion (*linear impulse*)

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, \mathbf{F}\, dt$$ (dans Hibbeler. HRW utilise **J**)

Nous verrons que $\mathbf{I} = \Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1$

Théorème de l'impulsion (= Newton #2)

$$m\vec{v}_1 + \sum_{\text{forces}} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = m\vec{v}_2$$

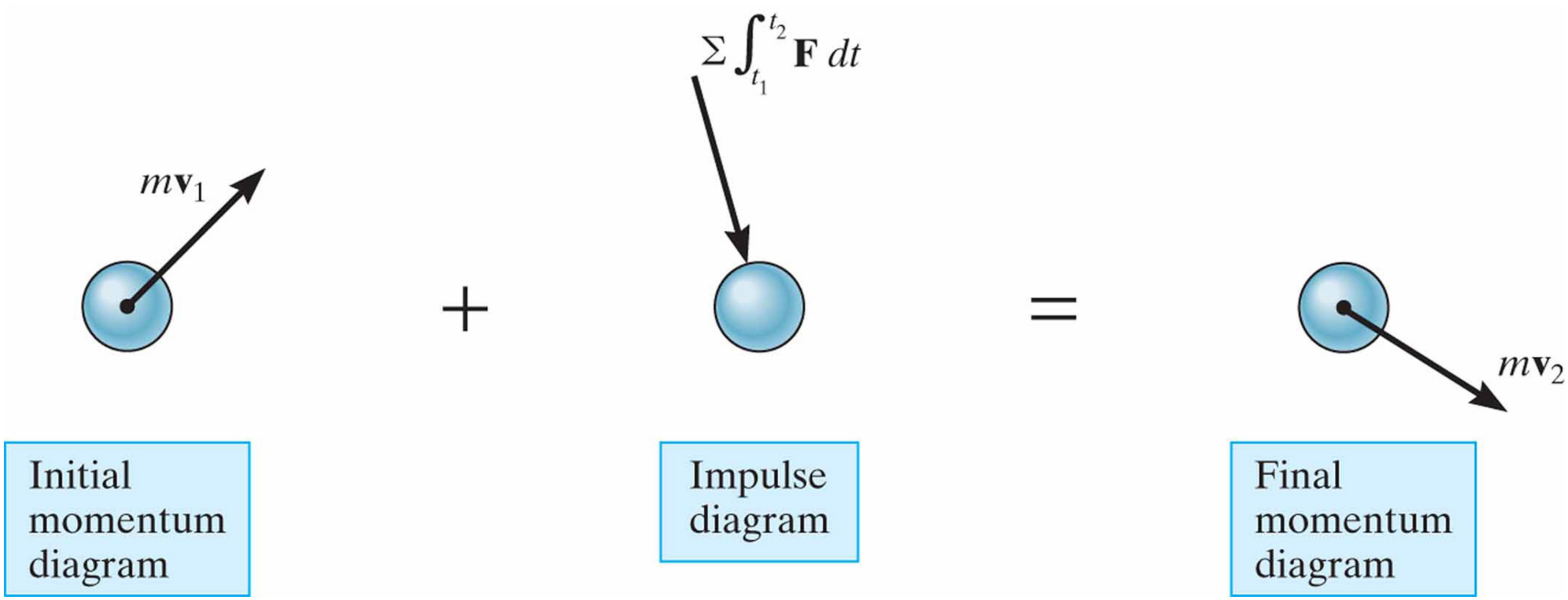


fig15_03.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

Conservation de quantité de mouvement

$$\sum_i m_i \left(\vec{v}_i\right)_1 + \sum_{i,\text{forces}} \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F_i}\, dt = \sum_i m_i \left(\vec{v}_i\right)_2$$

quand la somme des impulsions externes est nulle,

$$\sum_{i,\text{forces}} \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F_i}\, dt = \vec{0}$$

mène à la conservation de q. de m.

$$\sum_i m_i \left(\vec{v}_i\right)_1 = \sum_i m_i \left(\vec{v}_i\right)_2$$

Collisions et impact

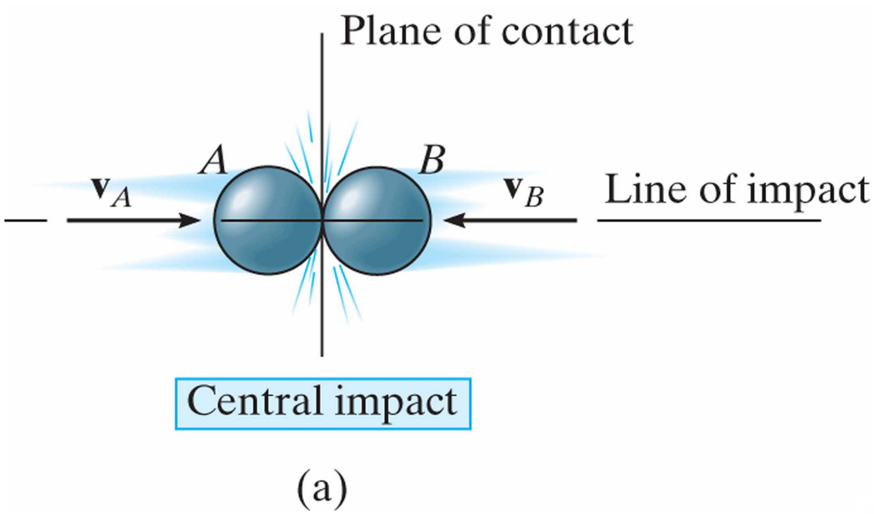


fig15_13a.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

La ***ligne d'impact*** passe par les CM des deux objets.

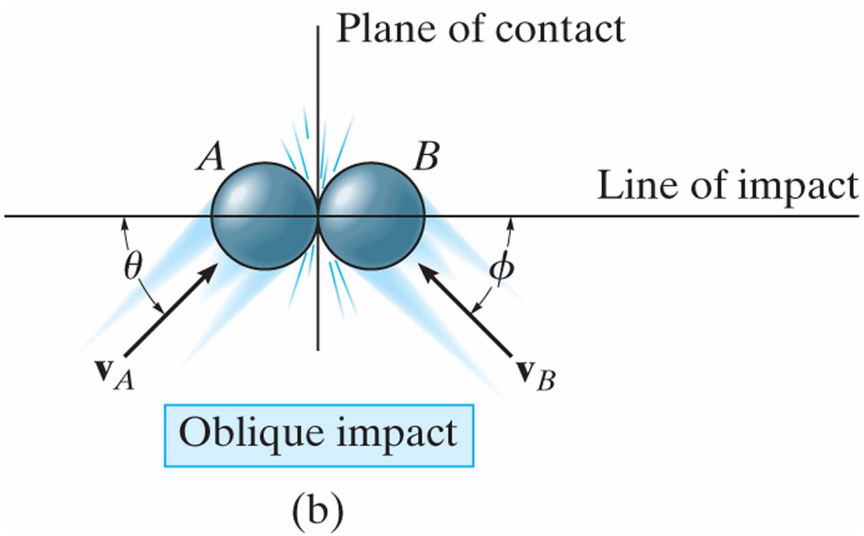


fig15_13b.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

Impact central

Typiquement, les vitesses initiales, $(v_A)_1$ et $(v_B)_1$, sont connues, et on peut obtenir les vitesses finales, $(v_A)_2$ et $(v_B)_2$, à partir de la conservation de **L**,

$$m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

et du *coefficient de restitution*

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$$

C'est le rapport de la vitesse relative (le long de la ligne d'impact) *après* la collision à la vitesse relative *avant* la collision.
e = 1: collision *élastique*, e = 0: collision *plastique*.

Impact oblique

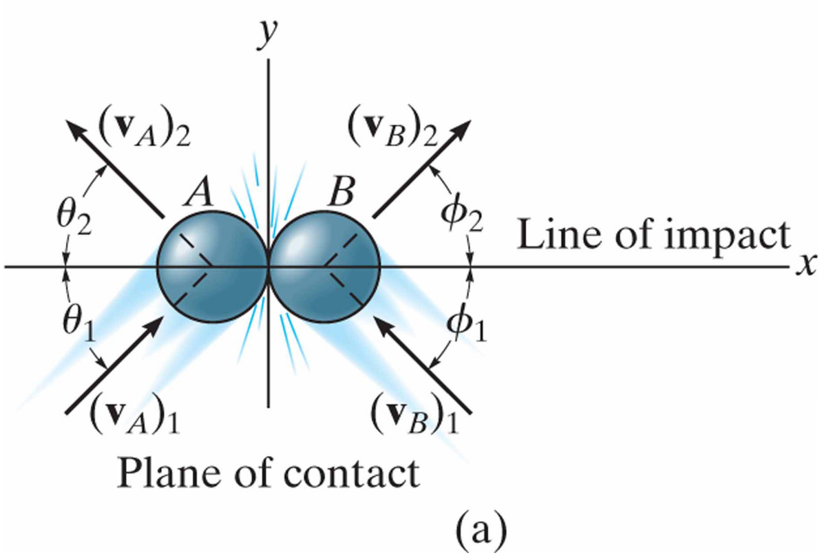


fig15_15a.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

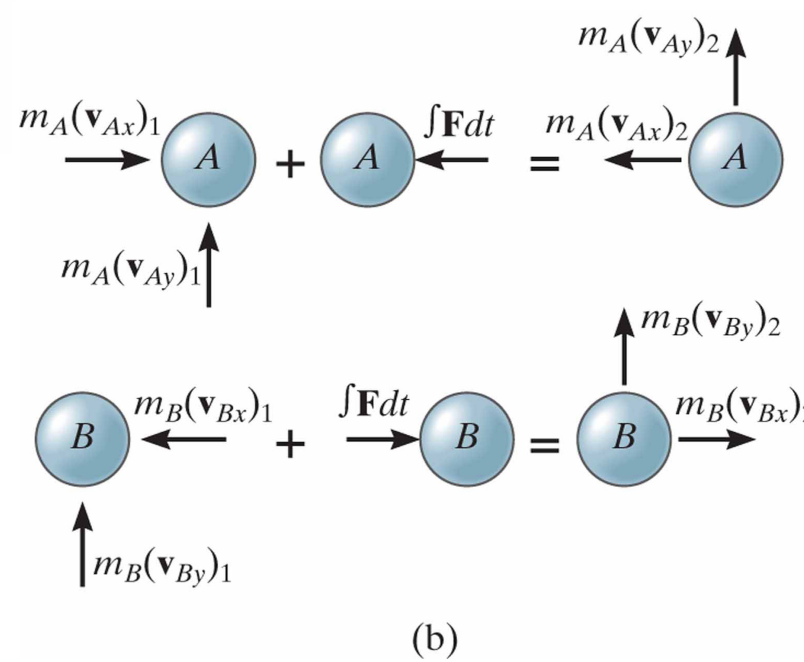


fig15_15b.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

Impact oblique

Les composantes x (ou n) sont reliées par les relations:

$$m_A\left(v_{Ax}\right)_1+m_B\left(v_{Bx}\right)_1=m_A\left(v_{Ax}\right)_2+m_B\left(v_{Bx}\right)_2$$

et

$$e=\frac{\left(v_{Bx}\right)_2-\left(v_{Ax}\right)_2}{\left(v_{Ax}\right)_1-\left(v_{Bx}\right)_1}$$

Les composantes y (ou t) ne changent pas

$$\left(v_{Ay}\right)_2=\left(v_{Ay}\right)_1, \quad \left(v_{By}\right)_2=\left(v_{By}\right)_1$$

PHYSQ 131 - G. Cinétique et dynamique de la rotation de corps rigides

HRW Sec. 10.1-7; 11.1-8

H Sec. 15.5-7;16.1-4; 17.1-5

[Les exemples sont tirés de la 12è édition de Hibbeler et de Young-Freedman]

Cinématique de rotation θ,ω,α

Variable angulaires et variables linéaires

Énergie cinétique de rotation T_{rot}

Moment d'inertie I

Moment de force τ *(M_O dans Hibbeler)*

Deuxième loi de Newton, version rotationnelle

Roulement, énergie cinétique de rotation et de translation

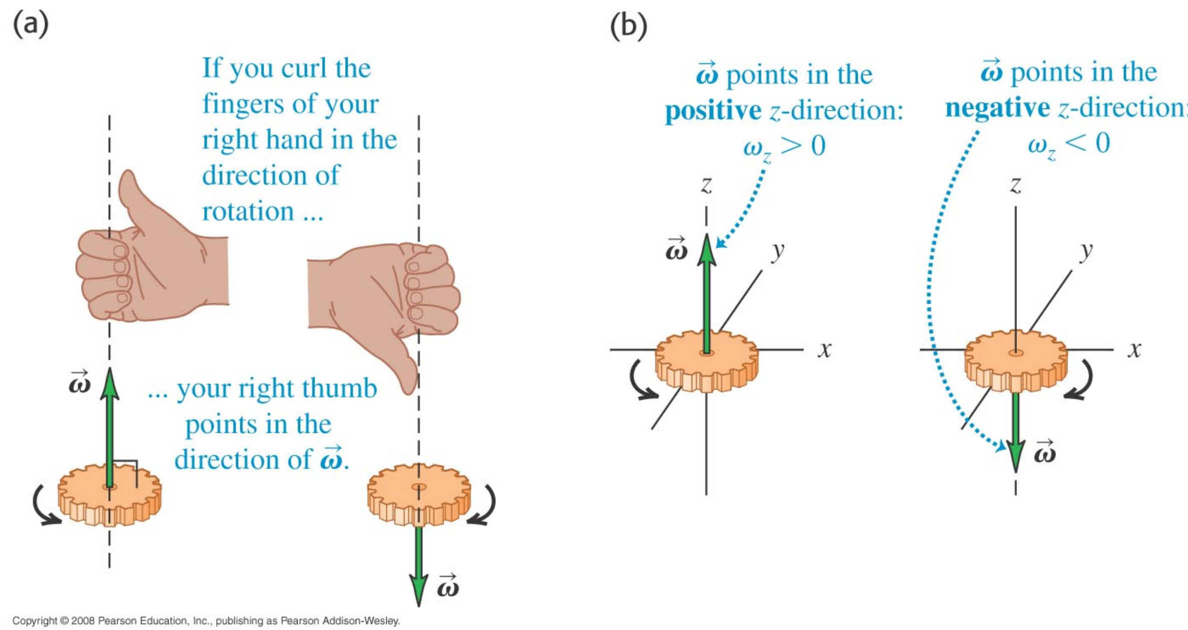
Moment cinétique L *(H_O dans Hibbeler)*

Version rotationelle du théorème de l'impulsion

Cinématique de rotation

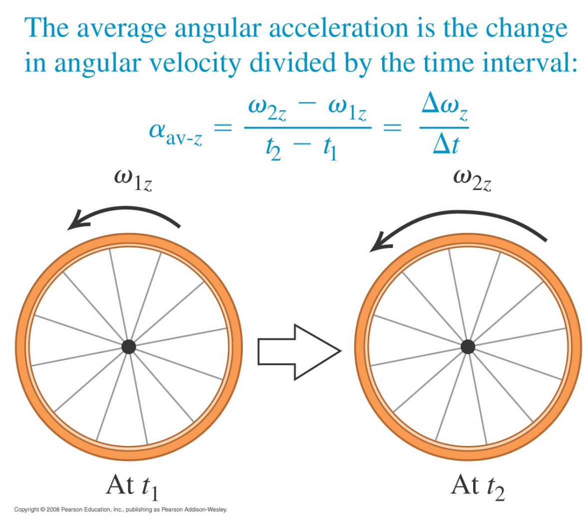
Vitesse angulaire

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{en rad/s}$$



Accélération angulaire

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{en rad/s}^2$$



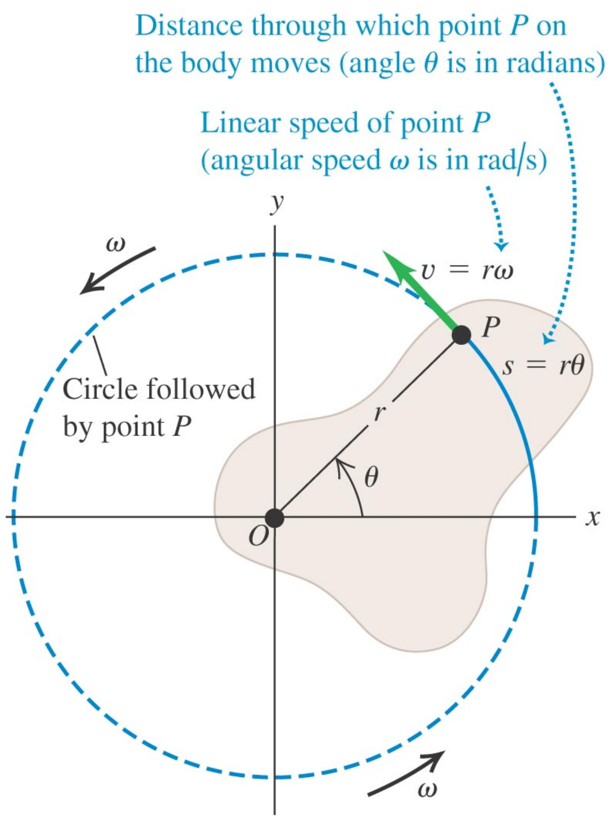
Variables angulaires et variables linéaires

$$s = r\theta$$

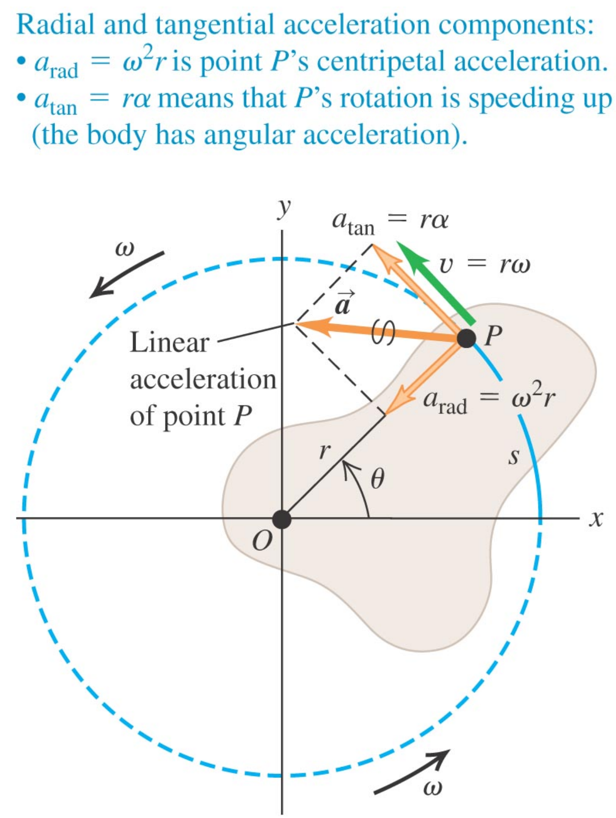
$$v_t = r\omega$$

$$a_t = r\alpha$$

$$a_n = \omega^2 r$$



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.



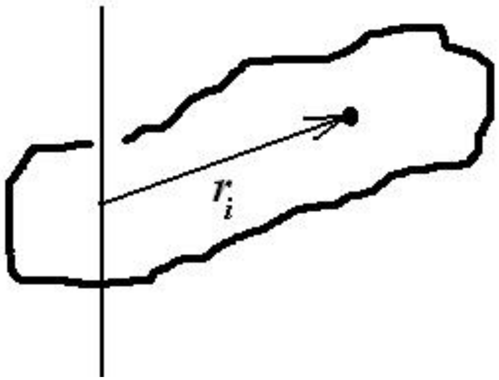
Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Énergie cinétique de rotation

$$T_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{ti}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\omega r_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Moment d'inertie

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2$$

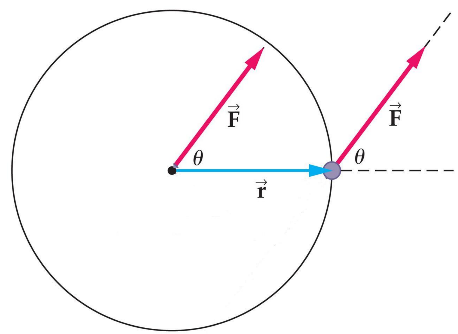


$$I \equiv \int r^2\, dm = \int r^2 \rho\left(\vec{r}\right) dV$$

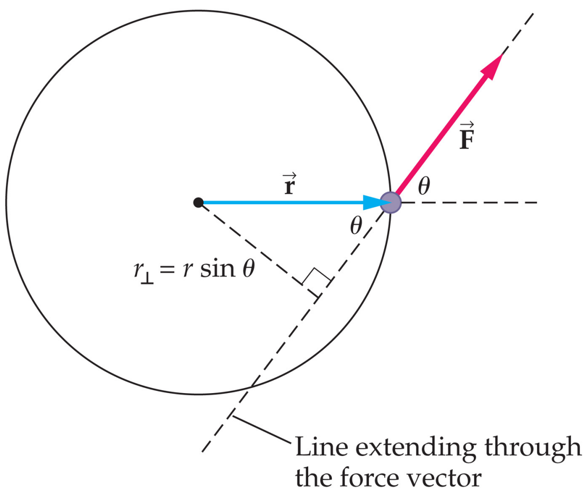
Moment de force

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

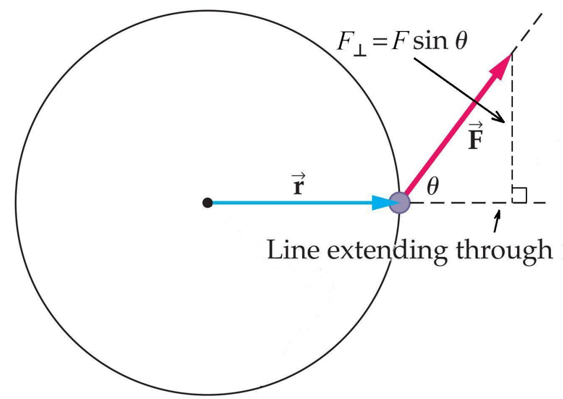
$$\tau = r_{\perp} F = r F_{\perp} = r F \sin\theta$$



Copyright © 2007 Pearson Prentice Hall, Inc.

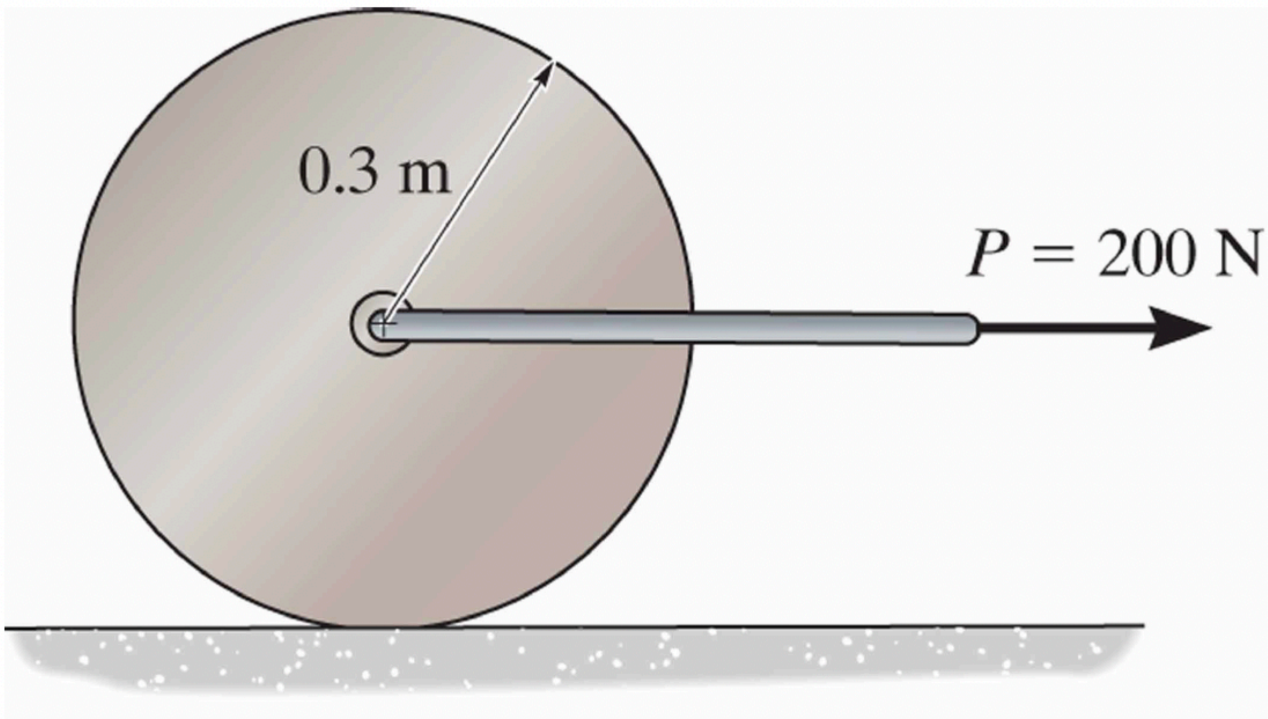


Copyright © 2007 Pearson Prentice Hall, Inc.



Copyright © 2007 Pearson Prentice Hall, Inc.

Attention à la direction & position des forces. Entre autres, attention à la direction des forces de friction. Par ex.



Loi de Newton rotationnelle $\sum \tau_z = I\alpha_z$

où l'axe z est parallèle à l'axe de rotation fixe. En effet

$$
\begin{aligned}
\sum \tau_z &= \sum \sum_i (\tau_z)_i \\
&= \sum \sum_i (F_\perp)_i r_i \\
&= \sum_i m_i (a_t)_i r_i \\
&= \sum_i m_i (\alpha r_i) r_i \\
&= \left(\sum_i m_i r_i^{\,2} \right) \alpha_z = I\alpha_z
\end{aligned}
$$

Dynamique de translation et rotation

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{cm}} \qquad \sum \tau_z = I_{\text{cm}} \alpha_z$$

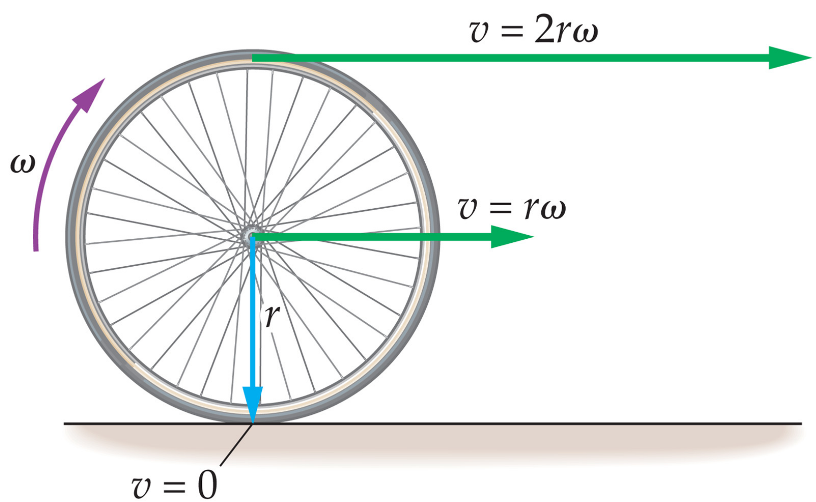
Combinaison de rotation et de translation

$$T = T_{cm} + T_{rot} = \frac{1}{2} M v_{cm}{}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

Roulement sans glissement (possible avec friction statique)

$$v_{cm} = \omega R$$

Avec friction, $T = T_{cm} + T_{rot}$



Copyright © 2007 Pearson Prentice Hall, Inc.

Sans friction, $T_{rot} = 0$ et
$T = T_{cm}$

Travail et puissance rotationnelles

Travail par un moment de force

$$dU = F_t R d\theta = \tau_z d\theta$$ cas infinitésimal

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta$$ cas fini

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta = \tau_z \left(\theta_2 - \theta_2\right) = \tau_z \Delta\theta$$ moment de force constant

Moment cinétique (ou moment angulaire) H_O

= Moment de la quantité de mouvement **L** p/r à *O*

$$\overrightarrow{H_O} = \vec{r} \times \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

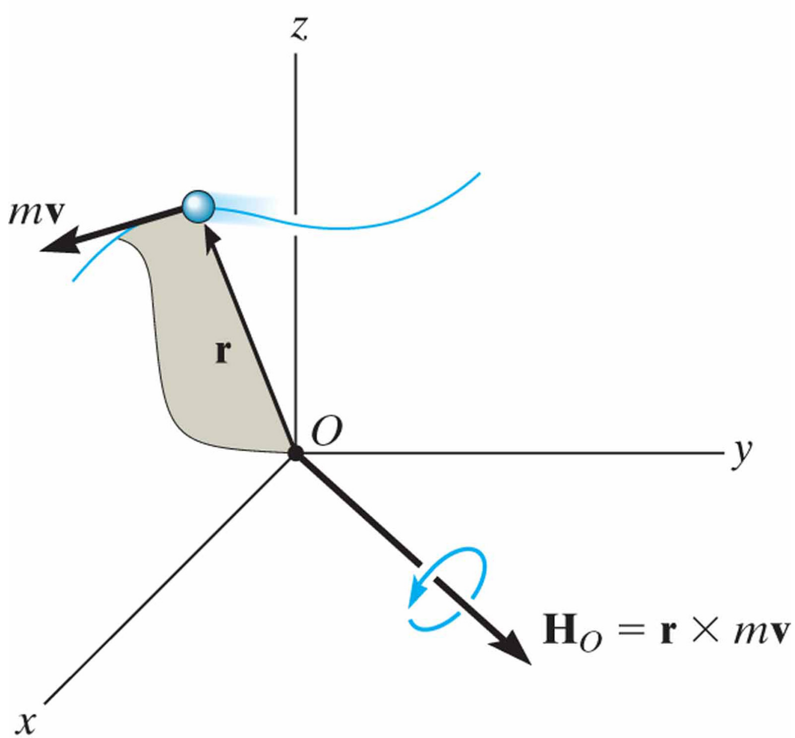


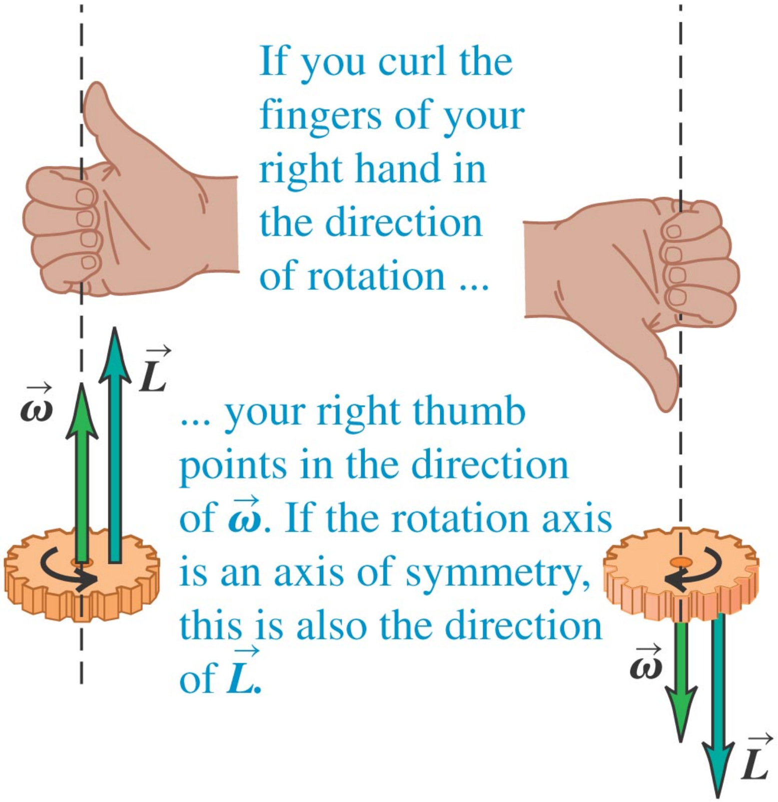
fig15_20.jpg

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

$\mathbf{H}_O$ = vecteur de *longueur* $H_O = mvr_\perp = mv_\perp r = mvr\sin\theta$

et de *direction* donnée par la main droite (voir figure)

$\mathbf{H}_O$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\mathbf{r}$ et $m\mathbf{v}$



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

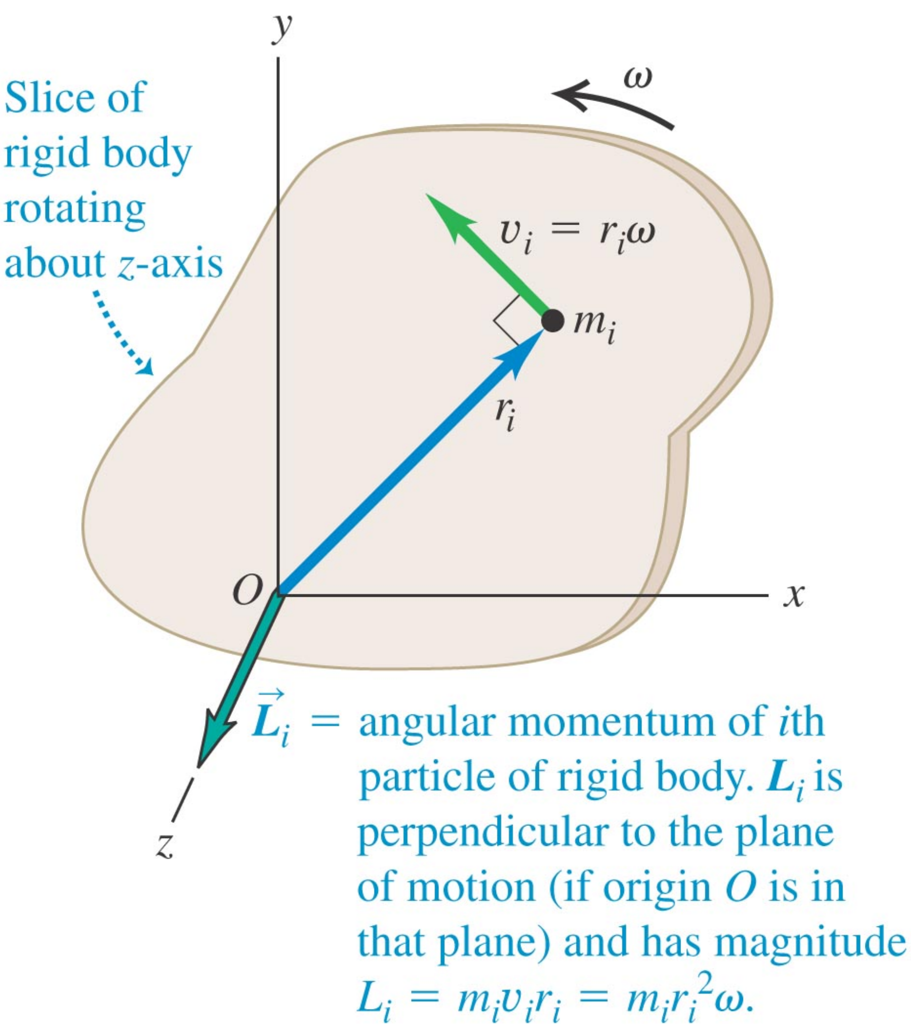
Notation
Hibbeler $\mathbf{H}_O$
Y&F $\mathbf{L}$

Rotation d'un corps rigide

$$(H_O)_i = m_i \overbrace{v_i}^{\omega r_i} r_i = m_i \omega r_i^2$$

$$(H_O)_{total} = \sum_i (H_O)_i = \overbrace{\sum_i m r_i^2}^{I} \omega$$

$$\overrightarrow{H}_O = I\overrightarrow{\omega}$$



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

BONNE CHANCE!