VITESSE LIMITE DANS UN FLUIDE

1 But

De petits objets qui se déplacent lentement dans un fluide subissent l'action d'une force de frottement proportionnelle à leur vitesse[1]. Éventuellement, ces objets cessent d'accélérer et se déplacent à une vitesse constante, appelée *vitesse limite*. Les gouttes de pluie et les grêlons en sont des exemples. Dans le cadre de cette expérience[2], nous étudierons la relation entre la vitesse limite de balles d'acier qui tombent dans la glycérine et la grosseur de ces balles. De cette relation entre vitesse limite et grosseur des balles, la valeur de la viscosité de la glycérine peut être déterminée.

Une analyse d'erreur détaillée est demandée dans votre rapport de laboratoire. Prenez donc bonne note des incertitudes.

2 Théorie

Un petit objet de masse m qui tombe à basse vitesse dans un liquide subit l'action de trois forces comme illustré à la figure ci-dessous:

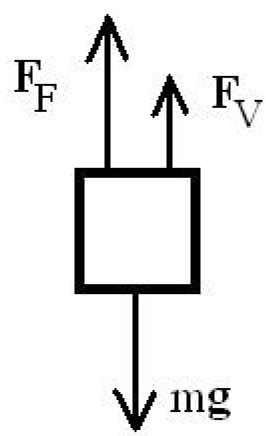

Figure 1. Forces sur une balle tombant dans un fluide visqueux.

Les deux forces dirigées vers le haut, qui retardent donc la chute de la balle, sont la force d'Archimède, $\mathbf{F}_F$, et la force de la résistance visqueuse, $\mathbf{F}_V$. La dernière force est la force gravitationnelle, $m\mathbf{g}$, qui est dirigée vers le bas. L'accélération $\mathbf{a}$ de la balle est donc donnée par

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - \mathbf{F}_V - \mathbf{F}_F. \tag{1}$$

[1] On parle alors d'un *fluide visqueux*, et la force de frottement interne est rattachée au concept de *viscosité* du fluide.

[2] Traduction de: Experiment 12 - Terminal Velocity in a Fluid, *Physics Laboratory Manual- Phys 124/126,* Department of Physics, University of Alberta.

Si on suppose que $\mathbf{F}_V$ est proportionnelle à la vitesse v,

$$F_V = \gamma v, \qquad \gamma \text{ constante,} \tag{2}$$

alors cette force augmente au fur et à mesure que le corps accélère vers le bas, ce qui provoque en retour une diminution de l'accélération. Ce processus continue jusqu'à ce que $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, et ainsi la balle continue jusqu'à une vitesse limite, v_l. L'équation (1) devient alors

$$mg = F_V + F_F = \gamma v_l + F_F. \tag{3}$$

En résumé, lorsqu'une balle est lâchée dans un liquide, elle accélère jusqu'à ce qu'elle atteigne la vitesse limite v_l, donnée par (3), et elle maintiendra ensuite cette vitesse constante.

La vitesse limite v_l d'une balle d'acier de rayon r qui tombe dans un fluide dont le coefficient de viscosité est η peut être déterminée à partir de la loi de Stoke:

$$\mathbf{F}_V = 6\pi\eta r v \tag{4}$$

de sorte que $\gamma = 6\pi\eta r$, dans l'équation (2).

Supposons que la balle ait une densité ρ, et le liquide, une densité ρ'. Si le rayon de la balle est r, alors la masse de la balle est

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\rho\pi r^3.$$

La force d'Archimède $\mathbf{F}_F$ est égale au poids du liquide déplacé par ce volume:

$$F_F = \rho' V g = \rho' g \frac{4}{3}\pi r^3.$$

L'équation (3) devient alors

$$\frac{4}{3}\rho g \pi r^3 = \frac{4}{3}\rho' g \pi r^3 + 6\pi\eta v_l r, \tag{5}$$

ce qui donne

$$v_l = \frac{2g\,(\rho - \rho')}{9\eta} r^2. \tag{6}$$

L'écoulement d'un fluide (liquide ou gazeux) n'est jamais parfait, car il est retardé par des forces de friction internes, appelées *forces visqueuses.* Cette propriété des fluides affecte à la fois l'écoulement du fluide lui-même et le mouvement d'un corps qui y circule. Elle est caractérisée par une quantité appelée le *coefficient de viscosité* η, dont les unités sont N·sec/m^2, ou Pa·sec (en unités SI).

L'équation (6) est valide si les conditions idéales suivantes sont satisfaites:

1. Il n'y a pas de turbulence dans le mouvement. La loi de Stoke est respectée.
2. La balle tombe dans un volume de liquide infiniment grand. Ainsi, les effets de la paroi du cylindre sont négligeables.

3 Manipulations et observations

Remarque: La vitesse limite est atteinte à environ *5 cm sous la surface supérieure du fluide*. Les mesures de vitesse ne doivent donc pas être effectuées plus haut que ce point. L'effet du bas du cylindre est négligeable si les mesures sont prises à au moins *3 cm au-dessus* de celui-ci.

1. Vous utiliserez des balles d'acier dont le rayon varie de 0.770 mm à 2.370 mm (voir Remarque 1 à la fin). Les balles sont lâchées au centre du cylindre de glycérine en utilisant des pinces en plastique.
2. En commençant avec une balle de 0.770 mm, mesurez le temps t requis pour tomber d'une distance $d \pm \Delta d$ (à votre choix) dans le cylindre de glycérine. Vous pouvez utiliser les deux étiquettes collées sur le cylindre.
3. Répétez cette manipulation pour obtenir le temps t de trois balles différentes de même rayon.
4. Calculez le temps de chute moyen $\bar{t}$ et son erreur, i.e. la plus grande différence avec $\bar{t}$. Puisque le temps de réaction pour partir ou arrêter le chronomètre est d'environ 0.2 seconde, la valeur de $\Delta\bar{t}$ citée ne peut pas être plus petite que 0.2 seconde.
5. Utilisez le temps moyen $\bar{t}$ et la distance d pour déterminer la vitesse limite moyenne $v_l \pm \Delta v_l$ de la balle qui tombe dans la glycérine.
6. Retirez les balles en les attirant vers la surface à l'aide d'un aimant. *Ne laissez pas les balles toucher à l'aimant*, sinon elles seront magnétisées. Prenez tout simplement les balles avec vos doigts (ou les pinces en plastique) lorsqu'elles atteignent la surface.
7. Nettoyez les balles dans un gobelet *avec du méthanol, et non de l'eau, pour ne pas les faire rouiller!* Rangez-les dans leur bouteille. Vous pouvez ensuite vous laver les mains à l'eau car la glycérine est très soluble dans l'eau.
8. Mesurez la densité ρ' de la glycérine après que les lectures du temps de tous les différents diamètres aient été effectuées. L'hydromètre produit des bulles d'air dans la glycérine, et ceci pourrait déranger la chute des billes. L'hydromètre utilisé dans cette expérience a été calibré de façon à mesurer des densités variant de 1200 kg/m^3 à 1400 kg/m^3. Pour mesurer la densité de la glycérine, abaissez *lentement* l'hydromètre dans la glycérine et laissez-le flotter à sa position d'équilibre. Utilisez le niveau de la surface de la glycérine pour lire sur l'échelle de l'hydromètre.
9. La température de la glycérine devrait être la température de la pièce puisqu'elle y a été placée depuis quelques jours. Prenez et notez la température T de la pièce.
10. Mesurez le diamètre du cylindre en verre utilisé pour répondre à la question 2.

4 Analyse

Construisez un tableau approprié (voir Tableau 1, ci-dessous). Tracez un graphique linéaire pour déterminer la viscosité η de la glycérine à partir de sa pente. Énoncez les résultats de votre graphique dans votre analyse. Déterminez la viscosité $\eta \pm \Delta\eta$ de la glycérine. Comparez votre valeur expérimentale avec la valeur prédite selon la remarque 2 ci-dessous. Est-ce que votre valeur expérimentale de la viscosité $\eta \pm \Delta\eta$ de la glycérine est égale, à l'erreur près, à sa valeur prédite? Si les valeurs ne sont pas égales, comment pouvez-vous expliquer cet écart?

rayon	temps des essais			temps moyen		quantité x	quantité y
r (± 0.005) (mm)	t_1 (sec)	t_2 (sec)	t_3 (sec)	t_{moy} (sec)	Δt_{moy} (sec)	$x \pm \Delta x$ (?)	$y \pm \Delta y$ (?)

Tableau 1. Vitesse des balles d'acier dans la glycérine.

Remarques:

1. La densité ρ des balles d'acier est $(7.80 \pm 0.05) \times 10^3$ kg/m^3. Les rayons r des balles sont de 0.770, 0.990, 1.190, 1.570, 1.980, 2.370 mm, avec une incertitude de $\Delta r = 0.005$ mm.
2. La valeur du coefficient de viscosité η de la glycérine est 1.490 Pa·s à 20°C et 0.954 Pa·s à 25°C. La valeur de η peut être interpolée linéairement pour les température entre 20°C et 25°C :

$$\eta = \eta_{20^\circ C} + \left(\frac{\eta_{25^\circ C} - \eta_{20^\circ C}}{25^\circ C - 20^\circ C} \right) (T - 20^\circ C)$$

5 Questions

(Insérez vos réponses dans la section *Analyse des résultats* de votre rapport.)

1. Les valeurs mesurées dans cette expérience sont le rayon r des balles et leur vitesse limite v_l. Comment l'équation (6) peut-elle être linéarisée pour produire une droite dont la pente permet de déterminer la viscosité η de la glycérine. Montrez clairement les quantités qui correspondent à y, x, la pente et b de votre graphique. Remarquez qu'il y a plus d'une façon de faire cette linéarisation.
2. Puisque le rayon du cylindre utilisé dans ce laboratoire n'est pas infiniment grand, ses parois affectent la vitesse limite des balles qui tombent dans la glycérine. La vitesse limite corrigée v_l' est donnée par

$$v_l' = v_l \left(1 + K \frac{r}{R} \right), \tag{7}$$

   où v_l est la vitesse limite mesurée, r est le rayon de la balle, R est le rayon du cylindre et K est une constante sans dimension. Seulement pour la plus grosse balle, calculez le pourcentage d'écart de la vitesse mesurée par rapport à la vitesse corrigée,

$$\frac{v_{\text{exp}} - v_{\text{accepte}}}{v_{\text{accepte}}} \times 100 = \frac{v_l - v_l'}{v_l'} \times 100$$

   en prenant $K = 2$.