Н.А.Карпенко

ГАММА-ФИЛЬТРАЦИЯ КОЛЬЦА ГРОТЕНДИКА КВАДРИКИ

Пусть φ - невырожденная квадратичная форма над полем F, $\mathrm{char} F \neq 2$; X - гиперповерхность $\varphi = 0$ в проективном пространстве соответствующей размерности; $K(X)$ - кольцо Гротендика квадрики X (т.е. факторгруппа свободной абелевой группы, порожденной всеми локально свободными $\mathcal{O}_X$-модулями, по известным соотношениям, связанным с короткими точными последовательностями $\mathcal{O}_X$-модулей; умножение индуцировано тензорным произведением). Статья посвящена вычислению кольца $G^*K(X)$, ассоциированого с гамма-фильтрацией (см. §1) кольца $K(X)$. Интерес к этой задаче возник в связи с тем, что гамма-фильтрация довольно близка к топологической [10]; в свою очередь градуированное кольцо, ассоциированное с топологической фильтрацией, является как бы первым приближением для кольца Чжоу неособого многообразия X [6], [10]. Таким образом, эта работа имеет отношение к интенсивному исследованию кольца Чжоу квадрики, предпринятому в последние годы [2], [3], [11], [14] и др.

Основные результаты статьи - это теоремы 3.1 и 3.3 и дополняющие их теоремы 5.2 и 6.7. Суть этих результатов в следующем. Единственный нетривиальный момент при вычислении кольца $G^*K(X)$ в нахождении кручения аддитивной группы этого кольца. Кручение удается разложить в прямую сумму $\underline{I}^* \oplus \underline{II}^*$ двух градуированных подгрупп: так называемых кручения первого рода $\underline{I}^*$ и кручения второго рода $\underline{II}^*$ (см. 2.13 и 3.4). Группа $\underline{I}^p$, по своему определению, при каждом p либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}/2$. При этом количество нетривиальных компонент в $\underline{I}^*$ равно $s(\varphi)$ - важному инварианту квадратичной формы φ, связанному с ее алгеброй Клиффорда (см. 2.3). Проблема выяснения, при каких p группа $\underline{I}^p$ нетривиальна, сведена к задаче о делимости некоторых целых чисел комбинаторной природы (см. 5.2), частичное решение которой осуществлено затем вручную (см. 5.3) и с помощью компьютера (см. 5.8).

Что касается кручения второго рода $\underline{\Pi}^*$, то оно бывает нетривиально лишь в случае, когда размерность d квадрики X четна и знаковый определитель квадратичной формы φ равен 1 (в F^*/F^{*2}). В этом случае порядок группы $\underline{\Pi}^*$ равен $(d/2-1)!$; нетривиальными могут быть лишь компоненты с номерами $2, 3, \ldots, d/2-1$; каждая из этих компонент является циклической группой, порядок которой выражается через числа Стирлинга второго рода (см. 6.7).

О структуре статьи. В §1 приведены необходимые сведения о гамма-фильтрации для произвольного алгебраического многообразия. В §2 строятся группы $\underline{I}^*$ и $\underline{\Pi}^*$. В §3 доказано две теоремы о структуре групп $G^pK(X)$, причем эти теоремы получены из общих соображений, практически без вычисления гамма-операций. Полученные здесь результаты уточняются затем в §§5 и 6. Для этого в §4 проводится вычисление значений гамма-операций на некоторых элементах кольца $K(X)$.

Обозначения и соглашения. Для алгебраического многообразия X его кольцо Гротендика обозначается $K(X)$ или просто K. Все встречающиеся многообразия неособы, что позволяет для любого когерентного $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{F}$ рассматривать его класс $[\mathcal{F}]$ в кольце K и, кроме того, дает возможность ввести на K топологическую фильтрацию, которая обозначается $K = T^0K \supset T^1K \supset \ldots$. Для гамма-фильтрации используется обозначение $K = \Gamma^0K \supset \Gamma^1K \supset \ldots$. Градуированные кольца, ассоциированные с этими фильтрациями, обозначаются соответственно $G^*_{top}K$ и G^*K. Начиная с §2 буква X обозначает d-мерную проективную квадрику, определенную над полем F невырожденной $(d+2)$-мерной квадратичной формой φ. В этом же параграфе вводятся обозначения для некоторых элементов кольца Гротендика K квадрики X.

Для квадратичных форм (которые иногда называются в тексте просто "формы") используются стандартные обозначения и теоремы из [9]. В частности, $i(\varphi)$ – это индекс Витта формы φ. Через $I^n(F)$ обозначается n-ная степень идеала четномерных форм $I(F)$ в кольце Витта квадратичных форм над полем F. Условие $[\varphi]\in I^2(F)$, часто возникающее в работе, означает, что φ – четномерная форма со знаковым определителем равным I. Важную роль в изложении играет инвариант $\mathfrak{j}(\varphi)$, введенный в 2.3.

И последнее соглашение. Если B – подгруппа абелевой группы A и $x\in A$, то класс элемента x в факторгруппе A/B может обозначаться $\bar{x}$, $[x]$, $x \bmod B$ и даже, если это не приводит к путанице, просто x. Выбор одного из этих способов определяется традицией или удобством.

Следует обратить внимание на то, что в 2.10 возникают исключения – некоторые квадрики малых размерностей –, которые в дальнейшем, чтобы не делать постоянных оговорок, не рассматриваются.

§I. Предварительные сведения

Пусть X – произвольное неособое неприводимое алгебраическое многообразие над некоторым полем. В этом параграфе приведены основные определения и утверждения, связанные с гамма-фильтрацией на кольце Гротендика $K=K(X)$, подробное изложение которых можно найти в [4].

ЛЯМБДА-ОПЕРАЦИИ. Пусть запись $1+t\cdot K[[t]]$ обозначает мультипликативную группу рядов над кольцом K от переменной t, у которых свободный член равен I. Определим гомоморфизм λ_t из аддитивной группы кольца K в группу $1+t\cdot K[[t]]$ формулой

$$\lambda_t([\mathcal{F}]) = \sum_{p=0}^{\infty}[\Lambda^p\mathcal{F}]\cdot t^p ,$$

где $\mathcal{F}$ – локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль, $\Lambda^p\mathcal{F}$ – его p-тая внешняя степень. Формула действительно задает гомоморфизм, поскольку $[\Lambda^n(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)] = \sum_{\rho=0}^{n} [\Lambda^\rho \mathcal{F}_1 \otimes \Lambda^{n-\rho}\mathcal{F}_2]$.

Лямбда-операции λ^ρ на K, где $\rho = 0, 1, 2, \ldots$ — это коэффициенты при степенях t в гомоморфизме λ_t, т.е. отображения (вообще говоря, не гомоморфизмы) из K в K, для которых

$$\lambda_t(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \lambda^\rho(x)\cdot t^\rho \qquad \text{при любом} \quad x \in K .$$

В частности, $\lambda^0(x) = 1$, $\lambda^1(x) = x$.

ГАММА-ОПЕРАЦИИ. Определим еще один гомоморфизм $\gamma_t : K \longrightarrow 1 + t\cdot K[[t]]$, положив $\gamma_t = \lambda_{\frac{t}{1-t}}$, т.е.

$$\gamma_t(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \lambda^\rho(x)\,(t + t^2 + \ldots)^\rho .$$

Гамма-операции $\gamma^\rho : K \to K$ определяются формулой

$$\gamma_t(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \gamma^\rho(x)\cdot t^\rho , \quad x \in K .$$

ЛЕММА I.I. Если $\xi \in K$ — класс обратимого $\mathcal{O}_X$-модуля, то $\gamma_t(\xi - 1) = 1 + (\xi - 1)t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ρ-тая внешняя степень Λ^ρ обратимого $\mathcal{O}_X$-модуля тривиальна при $\rho > 1$, получаем формулу $\lambda_t(\xi) = 1 + \xi t$. Отсюда

$$\gamma_t(\xi) = \lambda_{\frac{t}{1-t}}(\xi) = 1 + \xi\frac{t}{1-t} .$$

Следовательно,

$$\gamma_t(\xi - 1) = \frac{\gamma_t(\xi)}{\gamma_t(1)} = \frac{1 + \xi\frac{t}{1-t}}{1 + \frac{t}{1-t}} = 1 + (\xi - 1)t .$$

ЛЕММА I.2 [4]. Для топологической фильтрации $T^\rho K$ имеет место включение: $\gamma^\rho(T^1K) \subset T^\rho K$ при всех ρ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАММА-ФИЛЬТРАЦИИ. Гамма-фильтрация $K = \Gamma^0 K \supset \supset \Gamma^1 K \supset \ldots$ кольца Гротендика K — это наименьшая согласованная с умножением фильтрация, для которой $\Gamma^1 K = T^1 K$ и $\gamma^\rho(\Gamma^1 K) \subset \Gamma^\rho K$ при всех ρ. Таким образом, $\Gamma^\rho K$ — это подгруппа в K, порожденная всевозможными произведениями вида $\gamma^{p_1}(x_1)\cdot\gamma^{p_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot\gamma^{p_n}(x_n)$, где $x_i\in T^1K$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant p$. Отметим, что $T^1K = \operatorname{Ker} rk$, где $rk : K\to\mathbb{Z}$ – гомоморфизм, сопоставляющий классу локально свободного $\mathcal{O}_X$-модуля его ранг.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Гамма-фильтрация минорирует топологическую, т.е. $\Gamma^pK\subset T^pK$ при всех p; в частности, $\Gamma^{d+1}K=0$, где $d=\dim X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение – прямое следствие определения гамма-фильтрации и леммы 1.2.

Будем обозначать через G^*K и $G^*_{top}K$ градуированные кольца, ассоциированные с гамма-фильтрацией и с топологической фильтрацией соответственно. О близости этих двух фильтраций свидетельствует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 [4]. Индуцированный вложением фильтраций гомоморфизм градуированных колец $G^*K \longrightarrow G^*_{top}K$ после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$ становится изоморфизмом.

Еще одно свойство гамма-операций, которое получается из их связи с классами Черня [7], будет использовано в §3:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. При любом $p\geqslant 1$ отображение $\gamma^p : T^pK\to T^pK$ совпадает по модулю $T^{p+1}K$ с умножением на $(-1)^{p-1}(p-1)!$.

§2. Кручение первого и второго рода

Пусть характеристика поля F не равна 2, φ – невырожденная квадратичная форма над F размерности $d+2\geqslant 3$. Начиная с этого момента и до конца статьи, X – это проективная квадрика, определенная формой φ, т.е. гиперповерхность в проективном пространстве $\mathbb{P}_F^{d+1}$, заданная уравнением $\varphi=0$; в частности, $\dim X = d$.

К-теория квадрик и, в частности, группа Гротендика $K=K(X)$ вычислены Суоном [13]. Им построен некоторый канонический пучок $\mathcal{U}$ на X – локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль, обладающий структурой правого C_0-модуля, где $C_0 = C_0(\varphi)$ – четная часть алгебры Клиффорда квадратичной формы φ, и доказана

ТЕОРЕМА 2.1 [13]. Гомоморфизм групп $\mathbb{Z}^d \oplus K_0(C_0(\varphi)) \to K(X)$, переводящий стандартные образующие группы $\mathbb{Z}^d$ соответственно в $[\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X(-1)], \ldots, [\mathcal{O}_X(-d+1)]$, а класс $[M] \in K_0(C_0(\varphi))$ левого $C_0(\varphi)$-модуля M в класс тензорного произведения $\mathcal{U} \otimes_{C_0} M$, является изоморфизмом.

Сформулируем в виде предложения основные свойства алгебры C_0, доказательства которых можно найти, например, в [1], [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Размерность алгебры C_0 над полем F равна 2^{d+1}. Кроме того,

1) если $[\varphi] \notin I(F)$, то C_0 – простая центральная F-алгебра;

2) если $[\varphi] \in I(F) \setminus I^2(F)$, то C_0 – простая алгебра с центром $F(\sqrt{d_\pm \varphi})$, где $d_\pm \varphi$ – знаковый определитель;

3) если, наконец, $[\varphi] \in I^2(F)$, то $C_0 \simeq A \times A$, где A – некоторая простая центральная F-алгебра, при этом полная алгебра Клиффорда $C(\varphi)$ изоморфна алгебре матриц второго порядка $M_2(A)$ над A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Определим число $s = s(\varphi)$ следующим образом. Если $[\varphi] \notin I^2(F)$, то, согласно 2.2, $C_0 \simeq M_{2^s}(\mathcal{D})$ для некоторого тела $\mathcal{D}$ над полем F и целого неотрицательного s. Если же $[\varphi] \in I^2(F)$, то пусть s – такое число, что $A \simeq M_{2^s}(\mathcal{D})$, где $A \times A \simeq C_0$. Введенный инвариант s квадратичной формы удовлетворяет, как нетрудно видеть, неравенствам $i(\varphi) \le s(\varphi) \le (\dim\varphi - 1)/2$, где $i(\varphi)$ – индекс Витта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Имеются канонические изоморфизмы: $K_0(C_0) \simeq \mathbb{Z}$, если $[\varphi] \notin I^2(F)$; $K_0(C_0) \simeq \mathbb{Z}^2$, если $[\varphi] \in I^2(F)$. При этом класс алгебры C_0 в $K_0(C_0)$ равен 2^s в первом случае и $2^s \oplus 2^s$ во втором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $[\varphi] \notin I^2(F)$, то группа $K_0(C_0)$ порождается классом единственного (с точностью до изоморфизма) простого C_0-модуля P; при этом как левый модуль над собой C_0 изоморфна P^{2^s}. Если же $[\varphi] \in I^2(F)$, то имеется ровно два неизоморфных простых C_0-модуля, скажем, P и P', один из которых – это простой C_0-модуль, превращенный в модуль над $C_0 \simeq \simeq A \times A$ посредством первой проекции $A \times A \longrightarrow A$, другой – посредством второй проекции; $K_0(C_0) = \mathbb{Z}\cdot[P] \oplus \mathbb{Z}\cdot[P']$ и $C_0 \simeq P^{2^s} \oplus P'^{2^s}$. Следует обратить внимание на то, что пара модулей P и P' не имеет выделенного упорядочивания, поэтому в формулировке предложения допущена неточность: изоморфизм $K_0(C_0) \simeq \simeq \mathbb{Z}^2$ каноничен лишь с точностью до перестановки стандартных образующих группы $\mathbb{Z}^2$.

Отметим, что из теоремы 2.1 и предложения 2.4 получается

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Группа K не имеет кручения.

Обозначим через h элемент $1-[\mathcal{O}_X(-1)] \in \Gamma^1 K$ – класс общего сечения квадрики X гиперплоскостью в проективном пространстве.

ЛЕММА 2.6 [2]. Пусть $\mathcal{U}$ – пучок Суона на квадрике X. Тогда $[\mathcal{U}(d)] = h^d + 2h^{d-1} + \ldots + 2^{d-1}h + 2^d$ в $K(X)$.

Предложение 2.4 показывает, что класс пучка Суона в группе K делится на 2^s. Следовательно, на 2^s делится также сумма $h^d + 2h^{d-1} + \ldots + 2^d$ из леммы 2.6, и поэтому корректно такое

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Определим элементы $\ell^i \in K$ для $i = d, d-1, \ldots, d-s+1$ равенствами

$$\ell^i = \frac{1}{2^{d-i+1}}\left(h^d + 2h^{d-1} + \ldots + 2^{d-i}h^i\right);$$

кроме того, положим для удобства $\ell^{d+1} = 0$.

Геометрический смысл элементов ℓ^i таков: если индекс Витта формы φ, определяющей квадрику X, больше $d-i$, то ℓ^i –

это класс любого ($d-i$)-мерного проективного пространства $\mathbb{P}_F^{d-i}$, лежащего в X) (и имеющего, тем самым, в X коразмерность i).

ЛЕММА 2.8. Для всех $i = d, d-1, \ldots, d-s+1$ имеют место равенства: $h\ell^i = \ell^{i+1}$, $2\ell^i - \ell^{i+1} = h^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно из определения элементов ℓ^i .

Введем обозначение:

$$\delta(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } [\varphi] \in I^2(F); \\ 1, & \text{если } [\varphi] \notin I^2(F). \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Кольцо K вместе с гамма-фильтрацией зависит лишь от трех инвариантов формы φ : $\dim\varphi$, $\delta(\varphi)$ и $s(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $[\varphi] \notin I^2(F)$, то доказательство совсем простое. Названные инварианты однозначно определяют K как подкольцо в $H\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, где $H\subset K$ - подкольцо, порожденное h . Поскольку $\gamma_t(-h) = 1 - ht$ по 1.1 и $H\otimes\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[h]/(h^{d+1})$, гамма-операции на кольце K также определены однозначно.

В общем случае рассмотрим вложение $K(X) \hookrightarrow K(\bar{X})$, где $\bar{X} = X_{\bar{F}}$. Нетрудно убедиться, что кольцо $K(\bar{X})$ и гамма-операции на нем однозначно определяются размерностью квадрики. Инварианты $\delta(\varphi)$ и $s(\varphi)$ формы φ определяют $K(X)$ как подкольцо в $K(\bar{X})$, а гамма-операции на $K(X)$ являются сужениями гамма-операций на $K(\bar{X})$ (так как гамма-операции коммутируют, очевидно, с обратными образами).

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Если пара чисел ($\dim\varphi$, $s(\varphi)$) отлична от (3,1), (4,1), (5,2), а при $\delta(\varphi)=0$ еще и от (6,1) и (6,2), то $\ell^d \notin \Gamma^d K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если условие на φ , о котором говорится в формулировке, выполнено, то можно найти анизотропную форму φ' (над некоторым подходящим полем F'), инварианты $\dim\varphi', \delta(\varphi')$ и $s(\varphi')$ которой совпадают с инвариантами φ . Тогда $\ell^d \notin \Gamma^d K(X')$, где X' – квадрика, определенная φ' [2], [12], [14]. Так как $\Gamma^d K(X') \subset T^d K(X')$, отсюда следует, что $\ell^d \notin \Gamma^d K(X')$. Наконец, в силу предложения 2.9, $\ell^d \notin \Gamma^d K(X)$.

Чтобы не делать постоянных оговорок, мы убираем из дальнейшего рассмотрения исключительные случаи следствия 2.10, хотя, конечно, гамма-фильтрацию в этих случаях можно легко вычислить, слегка изменив дальнейшие рассуждения.

ЛЕММА 2.11. Пусть ρ_i – коразмерность элемента ℓ^i относительно гамма-фильтрации, т.е. такое число, что $\ell^i \in \Gamma^{\rho_i} K \setminus \Gamma^{\rho_i+1} K$. Тогда $\rho_d > \rho_{d-1} > \ldots > \rho_{d-s+1}$ и $\rho_i < i$ для всех i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коразмерность ℓ^{i+1} больше коразмерности ℓ^i, так как $h\ell^i = \ell^{i+1}$, $h \in \Gamma^1 K$ и умножение в K согласовано с гамма-фильтрацией. В 2.10 утверждается, что $\rho_d < d$, следовательно, в силу первого утверждения леммы, $\rho_i < i$ при всех i.

ЛЕММА 2.12. Элемент t^i имеет в группе $G^{\rho_i} K$ порядок 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $t^i \neq 0$. С другой стороны, по лемме 2.8 элемент $2\ell^i$ равен $\ell^{i+1} + h^i$ и, следовательно, лежит в $\Gamma^{\rho_i+1} K$, так как коразмерность элемента h^i (число i) и коразмерность элемента ℓ^{i+1} больше коразмерности ℓ^i по лемме 2.11.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Назовем кручением первого рода градуированную подгруппу $\underline{I}^* \subset G^* K$, определенную формулой

$$\underline{I}^\rho = \begin{cases} (\mathbb{Z}/2) \cdot t^i, & \text{если } \rho = \rho_i, \text{ где } i = d, d-1, \ldots, d-s+1; \\ 0 & \text{для остальных } \rho. \end{cases}$$

Кручением второго рода $\underline{II}^*$ назовем факторгруппу $(\mathrm{Tors}\, G^* K)/\underline{I}^*$.

§3. Строение факторгрупп гамма-фильтрации

Пусть $H \subset K$ – подкольцо, порожденное элементом h. Очевидно, что $H = \mathbb{Z}[h]/(h^{d+1})$, причем фильтрация $\Gamma^\rho H$ кольца H, индуцированная гамма-фильтрацией кольца K, есть фильтрация по степеням h :

$$\Gamma^p H = \Gamma^p K \cap H = \mathbb{Z}\cdot h^p \oplus \mathbb{Z}\cdot h^{p+1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\cdot h^d .$$

Поскольку $h = 1 - [\mathcal{O}_X(-1)]$, подкольцо H порождается также элементом $[\mathcal{O}_X(-1)]$ и содержит $[\mathcal{O}_X(n)]$ для всех целых n .

ТЕОРЕМА 3.1. Если $[\varphi] \notin I^2(F)$, то $\underline{II}^* = 0$, т.е. $\underline{I}^*$ совпадает с кручением группы G^*K (группы $\underline{I}^*$ и $\underline{II}^*$ определены в 2.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основе доказательства лежит следующая

ЛЕММА 3.1.1. Если $[\varphi] \notin I^2(F)$, то K/H - группа порядка 2^s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим композицию

$$\mathbb{Z}^d \oplus K_0(C_0(\varphi)) \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow[\sim]{[\mathcal{O}_X(d)]} K \longrightarrow K/H$$

изоморфизма Суона 2.1, d-кратного подкручивания и стандартного отображения на факторгруппу. Слагаемое $\mathbb{Z}^d$ лежит в ядре, так как $[\mathcal{O}_X(n)] \in H$. Получаем эпиморфизм $\alpha : \mathbb{Z} \simeq K_0(C_0) \twoheadrightarrow K/H$. По лемме 2.6 $[\mathcal{U}(d)] \in H$, поэтому $\alpha(2^s) = 0$ и, кроме того, $\alpha(2^{s-1}) \neq 0$, так как $[\mathcal{U}(d)] = h^d + 2h^{d-1} + \ldots + 2^d$ не делится на 2 в H . Следовательно, $Ker\,\alpha = 2^s\mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Снабдим группы H и K/H индуцированными фильтрациями. Пусть G^*H , $G^*(K/H)$ - ассоциированные градуированные группы. Точная последовательность $0 \to H \to K \to K/H \to 0$, поскольку фильтрации крайних членов спущены со среднего, индуцирует точную последовательность градуированных групп:

$$0 \longrightarrow G^*H \longrightarrow G^*K \longrightarrow G^*(K/H) \longrightarrow 0 .$$

Группа G^*H кручения не имеет, а $G^*(K/H)$ по лемме 3.1.1 - группа порядка 2^s . Следовательно, порядок кручения в G^*K делит 2^s . Поскольку построенная подгруппа кручения первого рода $\underline{I}^* \subset G^*K$ имеет порядок 2^s , мы заключаем, что $\underline{I}^* = Tors\, G^*K$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Отметим, что фактически построено расщепление точной последовательности $0 \to G^*H \to G^*K \to G^*(K/H) \to 0$, фигурирующей в доказательстве теоремы 3.1: поскольку подгруппа $G^*H \subset G^*K$ без кручения, пересечение $\underline{I}^*$ и G^*H тривиально, поэтому сужение эпиморфизма $G^*K \twoheadrightarrow G^*(K/H)$ на $\underline{I}^*$ дает мономорфизм, который, в действительности, биективен, так как порядки обеих групп равны.

ТЕОРЕМА 3.3. Если $[\varphi] \in I^2(F)$, то $\underline{II}^p$ – циклическая группа при каждом p, $\underline{II}^p = 0$ при $p \geq d/2$ и $|\underline{II}^*| = (d/2-1)!$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через L подгруппу $H + \mathbb{Z}2^{-1}[\mathcal{U}] = H + \mathbb{Z}\cdot \ell^{d-s+1}$ в K с индуцированной фильтрацией. Положим $u = [\mathcal{U} \otimes_{C_0} P] \in K$, где – любой (из двух неизоморфных) – модуль.

ЛЕММА 3.3.1. 1) Факторгруппа K/L – это бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $u \bmod L$. 2) Ассоциированная градуированная группа G^*L является прямой суммой $G^*H \oplus \underline{I}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 получается из теоремы Суона 2.1. Утверждение 2 доказывается точно так же, как и 3.2.

Продолжаем доказывать теорему. Снабдим факторгруппу K/L индуцированной фильтрацией и рассмотрим ассоциированную градуированную группу $G^*(K/L)$. Из точной последовательности

$$0 \to G^*L \to G^*K \to G^*(K/L) \to 0$$

получаем изоморфизм $G^*(K/L) \simeq G^*K/(G^*H \oplus \underline{I}^*)$. Следовательно, $\underline{II}^* \simeq \operatorname{Tors} G^*(K/L)$. Поскольку группа K/L циклическая, то и $\underline{II}^p$ – циклическая группа при каждом p.

Положим $m = d/2$. Факторгруппа $G^m_{top}K/G^mH$ содержит элемент бесконечного порядка [2], [12]; отсюда, в силу 1.4, факторгруппа G^mK/G^mH тоже содержит элемент бесконечного порядка; наконец, ввиду наличия изоморфизма $G^m(K/L) \simeq G^mK/(G^mH \oplus \underline{I}^m)$, то же можно сказать и о группе $G^m(K/L)$.

Поэтому $G^m(K/L)$ – бесконечная циклическая группа, а группы $G^p(K/L)$ при $p>m$ тривиальны. Следовательно, $\underline{\Pi}^p = 0$ при $p \geqslant m$.

Переходим к доказательству последнего утверждения теоремы – о порядке кручения второго рода. Пусть x – какой-нибудь элемент, порождающий циклическую группу K/L. Тогда группа $G^m(K/L)$ порождена элементом ax, где a – некоторое натуральное число, при этом порядок кручения в $G^*(K/L)$ равен a, т.е. $|\underline{\Pi}^*| = a$. Один элемент группы K, класс которого по модулю L порождает K/L, предъявлен в 3.3.1; однако для дальнейших вычислений удобен другой, который будет сейчас построен. Положим $\tilde{X} = X_E$ для какого-нибудь расширения E/F, полностью расщепляющего форму φ. Пусть $\ell^m \in T^m K(\tilde{X})$ – класс какого-либо m-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^m_E$, лежащего в $\tilde{X}$. Отметим, что ℓ^m, в отличие от ℓ^i при $i>m$, не является линейной комбинацией степеней h (с рациональными коэффициентами) и зависит от выбора $\mathbb{P}^m_E \subset \tilde{X}$. Из теоремы Суона 2.1 следует, что $2^{m-s}K(\tilde{X}) \subset K(X)$, где $s = s(\varphi)$. Положим $\ell = 2^{m-s}\ell^m \in K(X)$.

ЛЕММА 3.3.2. Факторгруппа K/L порождена элементом $\ell \bmod L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Цепочка вложений $H \subset K(X) \subset K(\tilde{X})$ дает вложение $K(X)/H \subset K(\tilde{X})/H$. Из теоремы Суона 2.1 следует, что $K(X)/H = 2^{m-s}(K(\tilde{X})/H)$. Факторгруппа $K(\tilde{X})/H$ порождается двумя элементами: $\ell^m \bmod H$ и $\ell^{m+1} \bmod H$ [2], [12]. Следовательно, факторгруппа $K(X)/H$ порождена элементами $\ell \bmod H$ и $2^{m-s}\ell^{m+1} \bmod H$. Поскольку $2^{m-s}\ell^{m+1} \in L$, факторгруппа $K(X)/L$ порождается элементом $\ell \bmod L$.

ЛЕММА 3.3.3. Если $i(\varphi) \geqslant s(\varphi)$, то $\ell \in T^m K(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $i(\varphi) \geqslant s(\varphi)$, то среди расширений поля F, полностью расщепляющих форму φ, можно выбрать расширение

E/F степени (делящей) 2^{m-1}. Применяя отображение нормы $N_{E/F}: T^m K(\tilde{X}) \to T^m K(X)$ к элементу $\ell^m \in T^m K(\tilde{X})$, получаем, что $\ell \in T^m K(X)$.

Выберем квадратичную форму φ' над подходящим полем F' так, чтобы $\dim \varphi' = \dim \varphi$, $\delta(\varphi') = \delta(\varphi)$, $s(\varphi') = s(\varphi)$ и при этом $i(\varphi') \geqslant s(\varphi')$. Такая φ' всегда найдется, и, в силу 2.9, φ можно заменить на φ'. Итак, будем считать, что $i(\varphi) \geqslant s(\varphi)$. Следует отметить, что написанное неравенство означает, что:

1) $i(\varphi) = s(\varphi) + 1$, если $\delta(\varphi) = 0$ и $s(\varphi) = m$;

2) $i(\varphi) = s(\varphi)$ в остальных случаях.

ЛЕММА 3.3.4. Группа $G^m(K/L)$ порождена элементом $(m-1)!\,\ell \bmod L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Класс ℓ порождает K/L, кольцо L замкнуто относительно гамма-операций и $\Gamma^1 K \cap L$ - идеал кольца K. Следовательно, группа $G^m(K/L)$ порождена классом элемента $\gamma^m(\ell)$. Осталось заметить, что $\gamma^m(\ell) = \pm (m-1)!\,\ell$ по модулю $T^{m+1}K$ в силу 1.5 и при этом $T^{m+1}K \subset L$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. В условиях теоремы 3.3 можно показать, что точная последовательность $0 \to \mathrm{I}^* \to \mathrm{Tors}\, G^*K \to \mathrm{II}^* \to 0$ расщепляется; тем самым, $G^*K \simeq G^*H \oplus \mathrm{I}^* \oplus \mathrm{II}^* \oplus [G^*(K/L)/\mathrm{II}^*]$. Последнее из этих четырех слагаемых представляет собой градуированную группу, у которой компонента коразмерности m - бесконечная циклическая группа, порожденная классом элемента $(m-1)!\,\ell$, а остальные компоненты тривиальны.

§4. Вычисление гамма-операций

Этот параграф посвящен вычислению гамма-операций на кольце

Гротендика квадрики X. Используемые здесь обозначения для элементов кольца Гротендика введены в §2.

ЛЕММА 4.1. Если $q > d/2$, то в K при любом положительном p имеет место равенство

$$\gamma^p(h^q) = -\frac{1}{p} \sum_n (-1)^n S^n_{p,q} \cdot h^n ,$$

где
$$S^n_{p,q} = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} C^i_p C^n_{ij} C^j_q$$

(в правой части этой формулы стоят биномиальные коэффициенты).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать взаимнообратные изоморфизмы групп

$$1 + t\cdot(K \otimes \mathbb{Q})[[t]] \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} t\cdot(K \otimes \mathbb{Q})[[t]] ,$$

где слева стоит мультипликативная группа рядов со свободным членом 1, а справа – аддитивная группа рядов без свободного члена. Эти изоморфизмы определяются стандартными формулами:

$$\ln(1 + tf) = -\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{t^i f^i}{i} \quad ; \quad \exp(tf) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i f^i}{i!} ,$$

где $f = f(t) \in (K \otimes \mathbb{Q})[[t]]$ – произвольный ряд.

Пусть $\xi = [\mathcal{O}_X(-1)]$. Тогда

$$\gamma_t(h^q) = \gamma_t((1-\xi)^q) = \gamma_t \Big[\sum_j (-1)^j C^j_q (\xi^j - 1) \Big] =$$
$$= \prod_j \big(\gamma_t(\xi^j - 1) \big)^{(-1)^j C^j_q} = \prod_j \big(1 + (\xi^j - 1) t \big)^{(-1)^j C^j_q}$$

(в последнем равенстве использована лемма 1.1).

Отсюда

$$\ln \gamma_t(h^q) = \sum_j (-1)^j C^j_q \ln(1 + (\xi^j - 1)t) =$$
$$= -\sum_{p \geq 1} \Big(\frac{t^p}{p} \cdot \sum (-1)^j C^j_q (1 - \xi^j)^p \Big) .$$

Заметим, что коэффициент при $-\frac{t^p}{p}$ в полученном ряде равен

$$\sum_j (-1)^j C^j_q (1-\xi^j)^p = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} C^i_p C^j_q \xi^{ij} = \sum_i (-1)^i C^i_p (1 - \xi^i)^q$$

и делится на h^q. Таким образом, $\ln\gamma_t(h^q) = h^q f(t)$ для некоторого ряда $f(t) \in t\cdot(K\otimes Q)[[t]]$. Отсюда

$$\gamma_t(h^q) = \exp(h^q f(t)) = 1 + h^q f(t) = 1 + \ln\gamma_t(h^q)$$

(в среднем равенстве используется, что $(h^q)^2 = 0$, так как по условию $2q > d$). Итак,

$$\gamma^p(h^q) = -\frac{1}{p}\sum_{i,j}(-1)^{i+j} C_p^i C_q^j \xi^{ij} .$$

Заменив в правой части ξ на $1-h$, получим доказываемую формулу.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Имеется свойство "линейности" гамма-операций на больших степенях h :

$$\gamma^p\Big(\sum_{q>d/2} a_q h^q\Big) = \sum_q a_q \gamma^p(h^q) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было замечено при доказательстве леммы 4.I, $\gamma_t(h^q)$ имеет вид $1+h^q f_q(t)$. Поэтому

$$\gamma_t\Big(\sum_{q>d/2} a_q h^q\Big) = \prod_q \big(\gamma_t(h^q)\big)^{a_q} =$$

$$= \prod_q \big(1+h^q f_q(t)\big) = 1 + \sum_q a_q h^q f_q(t) ,$$

так как $(h^q)^2 = 0$. Следствие доказано.

Пусть $\ell^q \in K$, где $q = d, d-1, \dots, d-s+1$, — введенные в 2.7 элементы. Отметим, что $q > d/2$, так как $s \le (d+1)/2$ по 2.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Значение гамма-операции γ^p на элементе $\ell^q \in K$ является линейной комбинацией $h^q, h^{q+1}, \dots, h^d$ (с рациональными коэффициентами), причем коэффициент при h^n равен с точностью до знака числу

$$T^n_{p,q} = \frac{1}{p}\sum_{i=q}^{n} 2^{q-i-1} S^n_{p,i} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается из 4.1, 4.2 и определения элементов ℓ^q.

§5. Случай простой алгебры Клиффорда

Этот параграф посвящен завершению вычисления кручения в факторгруппах гамма-фильтрации в случае, когда форма, определяющая квадрику, не лежит в $I^2(F)$ (т.е. когда алгебра C_0 проста). По теореме 3.1 кручение в этом случае исчерпывается подгруппой кручения первого рода. Как явствует из определения 2.13, вычислить группу T^* означает найти коразмерности элементов $\ell^d, \ell^{d-1}, \ldots, \ell^{d-s+1} \in K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Для $q \leq n$ положим $T_q^n = \max\{p \mid T_{p,q}^n \notin \mathbb{Z}\}$. Множество действительно имеет максимум: оно непусто, так как $T_{1,q}^n = \pm 2^{q-n-1} \notin \mathbb{Z}$, и ограничено сверху, так как $T_{p,q}^n = 0$ при $p > n$. Для любого целого неотрицательного n определим возрастающую последовательность натуральных чисел $q_0(n), q_1(n), \ldots, q_{n-1}(n)$ следующим образом:

$$q_i(n) = \max_{0 \leq j \leq i} \{ T_n^{n+j} + i - j \} .$$

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $n = d-s+1$. Тогда для всех $i = 0, 1, \ldots, s-1$ коразмерность элемента $\ell^{n+i} \in K$ относительно гамма-фильтрации равна $q_i(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что подкольцо $H \subset K$ замкнуто относительно гамма-операций и фильтрация кольца H, определяемая сужениями гамма-операций, – это фильтрация по степеням h. Аддитивная группа K является суммой своих подгрупп H и $\mathbb{Z} \cdot \ell^n$. Поэтому p-тый член $\Gamma^p K$ гамма-фильтрации кольца K порожден всевозможными произведениями $\gamma^{p_1}(\ell^n) \cdot h^{p_2}$, в которых $p_1 + p_2 \geq p$. Утверждение теоремы легко доказать теперь индукцией по i, используя формулу 4.3.

Таким образом, вопрос о $G^* K$ свелся к вычислению элементов последовательности $q_0(n), q_1(n), \ldots, q_{n-1}(n)$, т.е. к задаче о делимости некоторых целых чисел комбинаторной природы. Оставшаяся часть параграфа посвящена обсуждению этой задачи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Если $n>1$, то $q_0(n)=2$, $q_1(n)=3$; если $n>2$, то $q_2(n)=4$; если $n>3$, то $q_3(n)=6$.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Если $[\varphi]\notin I^2(F)$, то компоненты ассоциированного градуированного кольца G^*K, содержащие кручение, имеют такие номера:

1) 2, если $s(\varphi)=1$;
2) 2,3, если $s(\varphi)=2$;
3) 2,3,4, если $s(\varphi)=3$;
4) 2,3,4,6, если $s(\varphi)=4$;
5) 2,3,4,6 и какие-то большие, чем 6, если $s(\varphi)>4$.

Для доказательства предложения 5.2 понадобятся три леммы.

ЛЕММА 5.5. Пусть $s(n,k)$ – числа Стирлинга первого рода, $S(n,k)$ – числа Стирлинга второго рода [5]. Тогда

$$S^n_{p,q} = (-1)^{p+q}\frac{p!\,q!}{n!}\sum_k S(k,p)\cdot S(k,q)\cdot s(n,k)$$

(в правой части равенства суммирование ведется фактически по k от $\max(p,q)$ до n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для чисел Стирлинга второго рода имеется формула

$$(-1)^p p!\,S(k,p) = \sum_i (-1)^i C^i_p\, i^k \qquad [5]$$

Поэтому правая часть доказываемого равенства есть

$$\sum_{i,j}(-1)^{i+j}C^i_p C^j_q \sum_k \frac{s(n,k)\,(ij)^k}{n!}.$$

Осталось воспользоваться формулой $\sum_k \frac{s(n,k)\,(ij)^k}{n!} = C^n_{ij}$ [5].

ЛЕММА 5.6. Для любого натурального n имеют место формулы:

$$S(n,n)=1\;; \qquad s(n,n)=1\;;$$
$$S(n+1,n)=\tfrac12 n(n+1)\;; \qquad s(n+1,n)=-\tfrac12 n(n+1)\;;$$

$$S(n+2,n)=\frac{1}{24}n(3n+1)(n+1)(n+2) \quad ; \quad s(n+2,n)=\frac{1}{24}n(n+1)(3n+5)(n+2);$$

$$S(n+3,n)=\frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n+2)(n+3) \quad ; \quad s(n+3,n)=-\frac{1}{48}n(n+1)(n+2)^2(n+3)^2 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти формулы легко получить, пользуясь определением и простейшими свойствами чисел Стирлинга первого и второго рода [5].

ЛЕММА 5.7. 1) Если $n\geqslant 2$, то число $S(n,2)$ нечетно.

2) Если $n\geqslant 4$, то $S(n,4)\equiv n-1 \pmod 2$;

3) Если $n\geqslant 6$ и $n\equiv -1 \pmod 4$, то число $S(n,6)$ нечетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют рекуррентному соотношению: $S(n,k)=k\,S(n-1,k)+S(n-1,k-1)$ [5]. Будем писать сравнения по модулю 2. Имеем:

$S(n,2)=2\,S(n-1,2)+S(n-1,1)\equiv S(n-1,1)=1$, если $n\geqslant 2$, что доказывает утверждение 1 леммы.

Далее: $S(n,3)=3\,S(n-1,3)+S(n-1,2)\equiv S(n-1,3)+1$. Так как $S(3,3)=1$, отсюда следует, что $S(n,3)\equiv n$ при $n\geqslant 3$. Поскольку $S(n,4)=4\,S(n-1,4)+S(n-1,3)\equiv S(n-1,3)\equiv n-1$, доказано утверждение 2 леммы.

Используя сравнение $S(n,5)=5\,S(n-1,5)+S(n-1,4)\equiv S(n-1,5)+n$, легко показать, что $S(n,5)$ нечетно, если $n\equiv 2 \pmod 4$ и $n\geqslant 5$. Отсюда получается последнее утверждение леммы, так как

$$S(n,6)=6\,S(n-1,6)+S(n-1,5) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИЛОЖЕНИЙ. Вычисление $q_0(n)$. По определению

$$q_0(n)=T_n^n=\max\{p \mid T_{p,n}^n\notin\mathbb{Z}\} \quad ;$$

$$T_{p,n}^n=\frac{1}{2p}S_{p,n}^n=\pm\frac{(p-1)!}{2}S(n,p)$$

по 4.3 и 5.5. Если $p\geqslant 3$, то, очевидно, $\frac{(p-1)!}{2}S(n,p)\in\mathbb{Z}$. При $p=2$ получаем нецелое число $\frac{1}{2}S(n,2)$, так как $S(n,2)$

при $n \geq 2$ нечетно по лемме 5.7. Тем самым, $q_0(n) = 2$, если $n \geq 2$. Легко видеть, что $q_0(1) = 1$, но число $q_0(1)$ имеет отношение к конике, у которой $s(\varphi) = 1$. Такая коника входит в список исключений следствия 2.10, которые были убраны из дальнейшего рассмотрения; поэтому информация о $q_0(1)$ не включена в формулировку доказываемого предложения.

Вычисление $q_1(n)$. Из определения видно, что $q_1(n) > q_0(n)$; поэтому $q_1(n) \geq 3$. Чтобы получить обратное неравенство, достаточно показать, что $T_n^{n+1} \leq 3$, т.е., что при $p \geq 4$ число $T_{p,n}^{n+1}$ целое. Сосчитаем $T_{p,n}^{n+1}$. Из 4.3 имеем:

$$T_{p,n}^{n+1} = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} S_{p,n}^{n+1} + \frac{1}{4} S_{p,n+1}^{n+1} \right] .$$

Воспользовавшись леммой 5.5, получим

$$S_{p,n}^{n+1} = (-1)^{p+n} \frac{p!}{n+1} \left[S(n,p) S(n,n) s(n+1,n) + S(n+1,p) S(n+1,n) s(n+1,n+1) \right].$$

Вычисляя правую часть с помощью формул леммы 5.6, находим, что

$$S_{p,n}^{n+1} = (-1)^{p+n} \frac{p!\,n}{2} \left[- S(n,p) + S(n+1,p) \right] .$$

Подобным же образом находим, что $S_{p,n+1}^{n+1} = (-1)^{p+n+1} p!\, S(n+1,p)$.

Следовательно, $T_{p,n}^{n+1}$ равно с точностью до знака выражению

$$\frac{(p-1)!}{4} \left[n\, S(n,p) - (n-1)\, S(n+1,p) \right] .$$

При $p > 4$ это выражение очевидно является целым. При $p = 4$ получаем $\frac{3}{2} \left[n\, S(n,4) - (n-1)\, S(n+1,4) \right]$.

Так как $S(n,4) \equiv n+1 \pmod{2}$ по лемме 5.7, число, стоящее в квадратных скобках, четно, и выражение опять оказывается целым числом.

Чтобы доказать, что $q_2(n) = 4$, достаточно убедиться, что число $T_{p,n}^{n+2}$ целое при $p \geq 5$. Используя 4.3, 5.5 и 5.6, получим формулу:

$$T_{p,n}^{n+2} = \pm \frac{(p-1)!}{48} \Big[n(3n+5) S(n,p) - 6(n-1)(n+1) S(n+1,p) + (3n-5) n\, S(n+2,p) \Big] .$$

Если $p>5$, то $(p-1)!$ делится на 48, поэтому $T^{n+2}_{p,n} \in \mathbb{Z}$. При $p=5$ тоже получится целое число, так как выражение, стоящее в квадратных скобках, очевидно, четное при любом n (здесь от чисел Стирлинга ничего не требуется).

Наконец, для доказательства утверждения о $q_3(n)$ нужно проверить два факта: $T^{n+3}_{6,n} \notin \mathbb{Z}$ и $T^{n+3}_{p,n} \in \mathbb{Z}$ при $p \geqslant 7$. Аналогичное предыдущим вычисление показывает, что $T^{n+3}_{p,n}$ с точностью до знака равно

$$\frac{(p-1)!}{96}\Big[\, n(n+2)(n+3)\,S(n,p) - (n-1)(n+1)(3n+8)\,S(n+1,p) + $$
$$+ n(n+2)(3n-5)\,S(n+2,p) - (n-2)(n-1)(n+1)\,S(n+3,p)\Big]$$

При $p \geqslant 7$ это выражение действительно целое, так как число, стоящее в квадратных скобках, всегда четно. Для доказательства, что $T^{n+3}_{6,n} \notin \mathbb{Z}$, проверим, что выражение в квадратных скобках при $p=6$ не делится на 4. Обозначим это выражение через x. Будем писать сравнения по модулю 4. Если $n \equiv 0$, то $x \equiv$ $\equiv 2S(n+3,6) \not\equiv 0$, так как $S(n+3,6)$ нечетно по лемме 5.7. Если $n \equiv 1$, то $x \equiv 2S(n+2,6) \not\equiv 0$ по той же причине. Если $n \equiv 2$, то $x \equiv 2S(n+1,6) \not\equiv 0$. Наконец, если $n \equiv -1$, то $x \equiv 2S(n,6) \not\equiv 0$. Предложение доказано.

Никаких принципиальных препятствий к тому, чтобы вычислять $q_i(n)$ для больших i подобно тому, как это было только что сделано для $i \leqslant 3$, нет. Однако технические трудности нарастают очень быстро. Поэтому дальнейшие вычисления проводились на компьютере, с помощью которого удалось доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. При всех $i \leqslant 20$ число $q_i(n)$ не зависит от n и равно (при тех n, при которых определено)

$i+3$ для всех i от 4 до 9;

$i+4$ для всех i от 10 до 20.

Отметим, что предложение 5.8 полностью завершает вычисление факторгрупп гамма-фильтрации кольца Гротендика квадрик (для которых $[\varphi] \notin I^2(F)$) размерности не выше 42.

Продолжить вычисления не позволила мощность компьютера. Не удалось даже "нащупать" очередной "скачок" в последовательности $q_i(n)$ (два найденных "скачка" происходят при $i=3$ и при $i=10$).

§6. Случай разложимой алгебры Клиффорда

Этот параграф посвящен завершению вычисления кручения в факторгруппах гамма-фильтрации в случае, когда форма, определяющая квадрику, лежит в $I^2(F)$ (т.е. когда алгебра C_0 раскладывается в декартово произведение двух алгебр). Кручение первого рода можно вычислить, лишь слегка модифицировав рассуждения предыдущего параграфа. Поэтому остановимся здесь лишь на вычислении кручения второго рода.

Пусть сначала форма φ, определяющая квадрику X, полностью расщеплена: $\varphi = X_0Y_0 + X_1Y_1 + \ldots + X_mY_m$. Пусть l^m_{px} и $(l^m_{px})'$ – классы в K m-мерных проективных пространств, лежащих в X и определенных уравнениями $X_0 = X_1 = X_2 = \ldots = X_m = 0$ и $Y_0 = X_1 = X_2 = \ldots = X_m = 0$ (можно показать, что $l^m \neq (l^m)'$ [2], [12]).

ЛЕММА 6.1. В K имеет место равенство: $l^m + (l^m)' = h^m + l^{m+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S = F[X_i, Y_i]_{i=0}^m/(\varphi)$; J и J' – идеалы S, порожденные элементами $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_m$ и $Y_0, X_1, X_2, \ldots, X_m$. Тогда l^m и $(l^m)'$ – это классы пучков, ассоциированных с S-модулями S/J и S/J'. Элемент l^{m+1} является классом любого $(m-1)$-мерного проективного пространства, лежащего в X, например, пространства, заданного уравнениями $Y_0 = X_0 = X_1 = X_2 = \ldots = X_m = 0$. Элементы $Y_0, X_0, X_1, X_2, \ldots, X_m$ порождают идеал $J + J'$ в S, поэтому l^{m+1} является классом пучка, ассоциированного с S-модулем $S/(J+J')$. Наконец, h^m –

это класс сечения квадрики X любым линейным подпространством коразмерности m в $\mathbb{P}_F^{2m+1}$, например, заданного уравнениями $X_1 = X_2 = \ldots = X_m = 0$. Поэтому h^m - это класс пучка, ассоциированного с S-модулем $S/(\mathcal{J} \cap \mathcal{J}')$. Доказываемое равенство возникает из точной последовательности S-модулей:

$$0 \longrightarrow S/(\mathcal{J}\cap\mathcal{J}') \xrightarrow{\alpha} S/\mathcal{J} \oplus S/\mathcal{J}' \xrightarrow{\beta} S/(\mathcal{J}+\mathcal{J}') \longrightarrow 0,$$

в которой

$$\alpha(x) = x \bmod \mathcal{J} \oplus x \bmod \mathcal{J}' \quad ; \quad \beta(y\oplus z) = y \bmod (\mathcal{J}+\mathcal{J}') - z \bmod (\mathcal{J}+\mathcal{J}').$$

ЛЕММА 6.2. [8]. Пусть $i : Z \hookrightarrow Y$ - замкнутое вложение многообразий. Тогда $\gamma^p(i_*([Z])) \in i_* K(Z)$ при любом $p \geqslant 1$, где $i_* : K(Z) \longrightarrow K(Y)$ - гомоморфизм прямого образа.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. При любом $p \geqslant 1$ гамма-операция $\gamma^p(\ell^m)$ является линейной комбинацией (с целыми коэффициентами) элементов $\ell^m, \ell^{m+1}, \ldots, \ell^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутое вложение $i : \mathbb{P}_F^m \hookrightarrow X$, для которого $i_*([\mathbb{P}_F^m]) = \ell^m$. Применяя лемму 6.2, получаем, что $\gamma^p(\ell^m) \in i_* K(\mathbb{P}_F^m)$. Группа $K(\mathbb{P}_F^m)$ порождена $[\mathbb{P}_F^m], [\mathbb{P}_F^{m-1}], \ldots, [\mathbb{P}_F^0]$ [10], поэтому группа $i_* K(\mathbb{P}_F^m)$ порождается элементами $\ell^m, \ell^{m+1}, \ldots, \ell^d$.

ЛЕММА 6.4. При любом $p \geqslant 1$ выполнено сравнение

$$\gamma^p(\ell^m) \equiv (-1)^{p-1}(p-1)!\, S(m,p)\, \ell^m \pmod{T^{m+1}K},$$

где $T^{m+1}K$ - ($m+1$)-ая группа топологической фильтрации, $S(m,p)$ - число Стирлинга второго рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем писать сравнения по модулю $T^{m+1}K$. Равенство $\ell^m + (\ell^m)' = h^m + \ell^{m+1}$ из леммы 6.1 дает сравнение $\gamma^p(\ell^m) + \gamma^p((\ell^m)') \equiv \gamma^p(h^m)$, так как операция γ^p линейна на T^mK по модулю $T^{m+1}K$ и $\gamma^p(\ell^{m+1}) \in T^{m+1}K$.

Согласно 6.3 $\gamma^p(\ell^m) \equiv a_p \ell^m$; из соображений симметрии $\gamma^p((\ell^m)') \equiv a_p (\ell^m)'$ с тем же коэффициентом. Из 4.1 и 5.5

$\gamma^p(h^m) \equiv (-1)^{p-1}(p-1)!\, S(m,p)\, h^m$. Получаем сравнение

$$a_p l^m + a_p (l^m)' \equiv a_p h^m \equiv (-1)^{p-1}(p-1)!\ S(m,p)\, h^m ,$$

из которого следует, что a_p имеет указанный в формулировке леммы вид.

Пусть теперь X – произвольная квадрика, для которой $[\varphi] \in I^2(F)$. Определим подкольцо $L \subset K$ и элемент $l \in K$ так, как это было сделано в доказательстве теоремы 3.3.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. При всех $p \geqslant 1$ выполнено сравнение

$$\gamma^p(l) \equiv (-1)^{p-1}(p-1)!\ S(m,p)\, l \ (\mathrm{mod}\, L) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{X} = X_E$, где E/F – полностью расщепляющее форму φ расширение. Из леммы 6.4 следует, что доказываемое сравнение выполнено по модулю $T^{p+1}K(\widetilde{X})$ в группе $K(\widetilde{X})$. Осталось заметить, что $T^{p+1}K(\widetilde{X}) \cap K(X) \subset L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6. Для любого натурального m определим последовательность $\tau_1(m), \tau_2(m), \ldots, \tau_m(m)$, положив

$$\tau_i(m) \; = \; \text{НОД} \; \{(p-1)!\, S(m,p)\}_{p=i}^{m} \; ,$$

где НОД – наибольший общий делитель.

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть X – d-мерная проективная квадрика, определенная формой φ , и $[\varphi] \in I^2(F)$; $m = d/2$. Тогда при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$ порядок циклической группы $\underline{\overline{\Pi}}^{i}$ равен $\tau_{i+1}(m)/\tau_i(m)$ (в частности, зависит лишь от размерности квадрики).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.8. Группа $\underline{\overline{\Pi}}^{0}$ тривиальна по очевидным причинам; при $i \geqslant m$ группа $\underline{\overline{\Pi}}^{i}$ тривиальна по теореме 3.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Как было показано в доказательстве теоремы 3.3, группа $\underline{\overline{\Pi}}^{*}$ изоморфна кручению в $G^*(K/L)$. Группа K/L циклическая и порождена классом элемента l ; кольцо L замкнуто относительно гамма-операций; $L \cap \Gamma^1 K$ – идеал кольца K . По этим причинам i-тый член фильтрации группы K/L порожден множеством $\{\gamma^p(\ell) \bmod L\}_{p\geq i}$, а, следовательно, – элементом $\tau_i(m)\,\ell \bmod \ell$, как явствует из следствия 6.5 и определения 6.6. Поэтому порядок группы $G^i(K/L)$ при $i\leq m-1$ равен $\tau_{i+1}(m)/\tau_i(m)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.9. Из теоремы 6.7 следует, что $|\overline{\Pi}^*| = \prod_{i=1}^{m-1} \tau_{i+1}(m)/\tau_i(m) = \tau_m(m)/\tau_1(m) = (m-1)!$. Таким образом, утверждение о порядке группы $\overline{\Pi}^*$ из теоремы 5.3 передоказано теперь другим способом (без использования предложения 5.5).

Ниже приведены порядки компонент градуированной группы $\overline{\Pi}^*$ для квадрик размерности $d\leq 20$, сосчитанные по формуле теоремы 6.7.

d	$\overline{\Pi}^1$	$\overline{\Pi}^2$	$\overline{\Pi}^3$	$\overline{\Pi}^4$	$\overline{\Pi}^5$	$\overline{\Pi}^6$	$\overline{\Pi}^7$	$\overline{\Pi}^8$	$\overline{\Pi}^9$
4	1								
6	1	2							
8	1	6	1						
10	1	2	6	2					
12	1	30	1	4	1				
14	1	2	30	2	3	2			
16	1	42	1	40	1	3	1		
18	1	2	126	2	10	2	2	2	
20	1	30	1	84	1	12	1	12	1

Примечание: пустые клетки соответствуют заведомо тривиальным компонентам (см. замечание 6.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра: модули, кольца, формы. М., Наука, 1966. 555с.
2. Карпенко Н.А. Алгебро-геометрические инварианты квадратичных форм // Алгебра и анализ. 1990. Т.2, вып.1.С.141-162.
3. Карпенко Н.А., Меркурьев А.С. Группы Чжоу проективных квадрик

// Алгебра и анализ. 1990. Т.2, вып.3. С.218-235.

4. Манин Ю.И. Лекции по алгебраической геометрии, часть II – K-функтор в алгебраической геометрии. М., 1971.

5. Рыбников К.А. Комбинаторный анализ. М., Наука, 1982. 368с.

6. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М., Мир, 1981. 600с.

7. Grothendieck A. La theorie des classes de Chern // Bull. Soc. Math. France. 1958. V.86. P. 137-154.

8. Grothendieck A. Théorie des Intersections et Théoreme de Riemann-Roch // Lect. Notes in Math. 225. Springer-Verlag. Heidelberg. 1971.

9. Lam T.Y. The algebraic theory of quadratic forms. Reading. 1973. 344 p.

10. Quillen D. Higher algebraic K-theory. I // Lect. Notes Math. 1973. Vol. 341. P. 77-139.

11. Rost M. Some new results on the Chowgroups of quadrics. Preprint. Regensburg. 1990.

12. Swan R.G. Vector bundles, projective modules and the K-theory of spheres // Ann. Math. Stud. 1987. V. 113. P. 432-522.

13. Swan R.G. K-theory of quadric hypersurfaces // Ann. Math. 1985. Vol. 122, № 1. P. 113-154.

14. Swan R.G. Zero cycles on quadric hypersurfaces // Proc. of the American Math. Soc. 1989. V. 107, № 1. P. 43-46.