ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КАРПЕНКО Никита Александрович

УДК 512.7

КОЛЬЦО ЧЖОУ ПРОЕКТИВНОЙ КВАДРИКИ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и
теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ - доктор
физико-математических наук,
профессор А.С.МЕРКУРЬЕВ

Ленинград - 1990

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Главная цель этой работы - изучение кольца Чжоу (т.е. градуированного кольца циклов по модулю рациональной эквивалентности) неособой проективной квадрики над произвольным полем характеристики не 2.

Циклом коразмерности p на алгебраическом многообразии X называется элемент свободной абелевой группы, порожденной всеми замкнутыми неприводимыми подмногообразиями, имеющими в X коразмерность p. Группа классов этих циклов относительно рациональной эквивалентности [11] обозначается CH^pX и называется группой Чжоу коразмерности p многообразия X. Градуированная (полная) группа Чжоу CH^*X - это прямая сумма $\coprod_{p\geqslant 0} CH^pX$. Понятие рациональной эквивалентности для циклов произвольной коразмерности, впервые предложенное Севери [21], является обобщением понятия линейной эквивалентности дивизоров [12] (т.е. циклов коразмерности I).

Для неособого многообразия X построена теория пересечений, состоящая в задании билинейного спаривания $CH^pX \times CH^qX \longrightarrow CH^{p+q}X$ для всех $p,q \geqslant 0$, которое превращает CH^*X в ассоциативное коммутативное градуированное кольцо с единицей, называемое кольцом Чжоу. Правда, в классической теории пересечений предполагается, что многообразие X квазипроективно [9], [11], однако более поздние подходы к определению кольца Чжоу не содержат этого ограничения. Один из таких подходов принадлежит Фултону и Макферсону [10]. Согласно другому, предложенному Квилленом [20], группа Чжоу коразмерности p есть p-тая группа когомологий некоторого пучка, связанного с К-теорией, а умножение в кольце Чжоу индуцировано умножением в

К-теории. Наличие такого подхода, надо сказать, - свидетельство, и не единственное, тесной связи между теорией колец Чжоу и К-теорией.

Вычисление кольца Чжоу неособого многообразия - одна из интересных и важных задач алгебраической геометрии. К сожалению, класс многообразий, для которых эта задача решена, весьма невелик. Пусть X - неособая квадратичная гиперповерхность в проективном пространстве над полем F и характеристика поля F не равна 2. Проблемы вычисления кольца Чжоу и К-теории квадрики X были поставлены в начале 80-х годов в докладе Р.Суона, опубликованном несколько позднее [26]. В 1985 г. выходит статья Суона [24], содержащая полное решение второй проблемы и указание на то, что первая проблема по-прежнему остается открытой. В работе [25], появившейся в прошлом году, приведено вычисление группы классов нульмерных циклов, которое уже было известно, но не публиковалось.

Кроме поводов, побудивших Суона обратить внимание к кольцу Чжоу квадрики, есть еще причина интереса к этой проблеме. Она заключена в работах А.С.Меркурьева, А.А.Суслина, М.Роста и др. о гомоморфизме норменного вычета n-ой степени [6], [17], [19], поскольку полученные при малых n доказательства биективности этого гомоморфизма, содержат вычисления в группах Чжоу некоторых квадрик.

Вот перечень основных результатов диссертации, относящихся к кольцу Чжоу.

I) Теоремы (2.4.3) и (2.4.5) дают полное описание кольца CH^*X в случае, если размерность квадрики X не превосходит 4.

2) Для квадрики X произвольной размерности найдена группа CH^2X ; соответствующий результат сформулирован в теореме (3.I.I).

3) В теореме (3.3.I) доказано, что кручение в группе CH^3X является циклической группой второго порядка, если нетривиально.

4) Во всех названных выше теоремах возникающая ненулевая группа кручения в CH^pX оказывается изоморфной $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Однако это свойство не распространяется на группы Чжоу произвольной квадрики, о чем свидетельствует теорема (3.4.7). Эта теорема утверждает, что для любого $p \geqslant 4$ кручение в группе CH^pX может иметь сколь угодно большую мощность при подходящем выборе X и основного поля. Таким образом, группы Чжоу квадрик не являются, вообще говоря, конечно порожденными. Это обстоятельство не оставляет, по мнению автора, шансов вычислить кольцо Чжоу произвольной проективной квадрики размерности большей, чем 4 и позволяет расценивать перечисленные выше результаты как близкие к окончательным.

Теперь о содержании работы более подробно.

Глава I начинается с обзора свойств К-когомологий алгебраических многообразий. С помощью К-когомологий можно дать определение группы Чжоу в самой общей ситуации: для произвольного (в т.ч. особого и даже приводимого) многообразия (I.I.I), такие многообразия появляются в дальнейшем на промежуточных стадиях некоторых вычислений. Если многообразие гладкое, то те же К-когомологии позволяют ввести и умножение (I.I.8). Второй параграф этой главы содержит простейшие сведения о группах Чжоу проективных квадрик. Значительная часть материала этого параграфа известна, но еще нигде не публиковалась. Здесь приведено описание группы классов дивизоров CH^1X (I.2.8) и группы классов нульмерных циклов (I.2.3); полное вычисление кольца CH^*X в случае, если квадратичная форма, определяющая гиперповерхность X полностью расщеплена (I.2.I). Здесь же показано, как задача вычисления кольца Чжоу CH^*X произвольной квадрики X сводится к вычислению подгруппы кручения $TCH^*X \subset CH^*X$, причем лишь для квадрик, не содержащих рациональных точек.

Глава II посвящена изучению кольца Гротендика $K(X)$ неособой квадрики X. В § I объяснены мотивы, по которым это изучение предпринято. Главный из них - наличие эпиморфизма из CH^*X в градуированное кольцо $G^*K(X)$, ассоциированное с топологической фильтрацией на $K(X)$. Этот эпиморфизм довольно часто оказывается изоморфизмом (2.I.2),(2.I.7), как, например, в случае, если размерность квадрики не превосходит 4. Вообще, кольца CH^*X и $G^*K(X)$ довольно близки, даже если и не совпадают (2.I.I), поэтому вычисление $G^*K(X)$ можно рассматривать как первый этап в вычислении CH^*X. Следующие два параграфа - §§ 2 и 3 - содержат основные общие теоремы (2.3.2) и (2.3.4) об ассоциированном градуированном кольце. В § 4 эти теоремы применяются для вычисления кольца Чжоу от квадрики, размерность которой не превосходит 4. Казалось бы, место этого параграфа в следующей главе. Но он помещен здесь, так как фактически в нем идет речь не о кольце Чжоу, а о кольце $G^*K(X)$. В § 5, в последнем параграфе главы, найдена одномерная компонента $G^{d-1}K(X)$ этого кольца (2.5.3), $d = \dim X$.

Глава III является, естественно, сердцевиной всей работы. Она начинается с результата о группе CH^2X произвольной квадрики X - теоремы (3.I.I). В доказательстве с помощью расслаивания аффинной окрестности проективного многообразия X над аффинной прямой осуществляется спуск к 4-мерной квадрике, для которой группа CH^2. известна из предыдущей главы. Таким образом, природа этого результата двоякая: база получена при помощи работы с кольцом Гротендика, успех в которой достигается благодаря теореме Суона (2.2.I), а индукционный переход осуществлен с помощью таких специфических средств теории колец Чжоу, как точная последовательность расслоения (I.I.3) и вырезания (I.I.5). Такая ситуация встречается здесь довольно часто и не позволяет полностью разделить доказательства теорем о CH^*X и теорем о $G^*K(X)$. В очередной раз мы сталкиваемся с этим в § 2, где вычисляется кольцо $G^*K(X)$ для всех 5-мерных и некоторых 6-мерных квадрик, теоремы (3.2.I) и (3.2.3). В предыдущую главу этот параграф поместить нельзя, поскольку в нем используется теорема о группе Чжоу коразмерности 2. В § 3 доказана теорема (3.3.I) о группе Чжоу коразмерности 3, а в § 4, завершающем главу, - теорема (3.4.7) о бесконечном кручении в группах Чжоу квадрик.

Цель главы IУ состоит в уточнении результатов главы П. Как известно, гамма-фильтрация на кольце Гротендика минорирует топологическую (4.I.3). Тем самым, вычисляя гамма-фильтрацию, мы получаем некоторую информацию и о топологической. Более подробно об этом написановв § 4. В § I сообщаются необходимые сведения о гамма-фильтрации для произвольного неособого многообразия. В § 2 находится центральный результат этой главы - вычисление (4.2.I) гамма-операций на кольце Гротендика квадрики. Общие теоремы об ассоциированном градуированном кольце, аналогичные теоремам из § 3 главы П, помещены в § 3. Задача определения гамма-фильтрации сведена здесь к некоторой задаче о целых числах (4.3.3), (4.3.4), которая решена затем с помощью компьютера для квадрик размерности не выше 40.

Обозначения, соглашения.

Пусть F - произвольное поле, характеристика которого отлична от 2, φ - невырожденная квадратичная форма над F размерности $d+2$. Всюду, кроме специально оговоренных случаев (в т.ч. кроме § I первой и последней глав) через X обозначается проективная квадрика, соответствующая форме φ, т.е. неособая гиперповерхность в проективном пространстве $\mathbb{P}_F^{d+1}$, заданная уравнением $\varphi=0$.

Для каждого p подгруппа кручения в CH^pX обозначается TCH^pX, факторгруппа CH^pX/TCH^pX - $\overline{CH}^pX$. Часто используются нижние индексы: $CH_pX = CH^{d-p}X$, где $d=\dim X$, - группа Чжоу размерности p. Это правило опускания индексов используется не только для группы Чжоу, но и для всех $\mathbb{Z}$-градуированных групп, встречающихся в работе.

Обозначения, связанные с кольцом Гротендика, введены в главе II, а те из них, что относятся к гамма-фильтрации - в главе IУ.

Для квадратичных форм (которые часто называются сокращенно: "формы") используются следующие обозначения и термины. "Диагональная" квадратичная форма $a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + \ldots + a_nX_n^2$ обозначается $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$. Форма вида $\langle 1,-a_1\rangle\otimes\langle 1,-a_2\rangle\otimes\otimes\ldots\otimes\langle 1,-a_n\rangle$ называется n-формой Пфистера и обозначается $\langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle\rangle$. Для двух квадратичных форм φ_1 и φ_2 над полем F пишем $\varphi_1\sim\varphi_2$ и говорим " φ_1 пропорциональна φ_2 ", если $\varphi_1\simeq c\varphi_2$ для некоторого $c\in F^*$ (пропорциональные формы определяют изоморфные квадрики). Через $I^n(F)$ обозначается n-ая степень идеала четномерных форм $I(F)$ в кольце Витта $W(F)$. Через $i(\varphi)$ обозначается индекс Витта формы φ, $D(\varphi)\subset F^*$ – множество значений, $d_\pm\varphi = \pm\det\varphi \in F^*/F^{*2}$ – знаковый определитель. Форма называется расщепленной (полностью расщепленной), если она изотропна (соответственно имеет максимально возможный для своей размерности индекс Витта). Мы говорим, что расширение E/F (полностью) расщепляет φ, где φ – квадратичная форма над полем F, если форма φ_E (полностью) расщеплена. Те же самые слова употребляются и в отношении квадрик. Например, квадрика расщеплена, если соответствующая ей форма расщеплена.

Для элементов факторгруппы зачастую, если это не приводит к путанице, не используется никаких дополнительных обозначений (черта сверху и т.п.). Факторгруппа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ обозначается сокращенно $\mathbb{Z}/n$. Для абелевой группы A запись $A = B\cdot x$, где B – циклическая группа, $x\in A$, означает, что A – циклическая группа порядка $|B|$, порожденная элементом x.

Остальные обозначения введены в основном тексте. Важную роль играет инвариант $s(\varphi)$, определенный в (2.2.4). Формулировки главных теорем даются, по возможности, полные, с расшифровкой всех встречающихся в них букв.

Нумерация утверждений в диссертации имеет вид $(a.b.c.)$, где a – глава, b – параграф, c – порядковый номер утверждения в параграфе.

Благодарности.

Мой первый долг – выразить глубокую признательность научному руководителю А.С.Меркурьеву. Кроме постановки задачи и знакомства с современными результатами этой области, я обязан ему формированием своего мировоззрения. Я искренне благодарен И.А. Панину и всему коллективу организованного им семинара по К-теории за длительное и плодотворное внимание к этой работе. Большую помощь оказал А.Л.Кириченко, выполнив вычисления на компьютере.

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ I. К-когомологии

В этом параграфе рассматриваются многообразия над некоторым фиксированным полем F. Под многообразием понимается приведенная отделимая схема конечного типа над F, являющаяся равноразмерной (размерности всех неприводимых компонент одинаковы). Перечислим некоторые более или менее известные факты о К-когомологиях.

(I.I.I) Спектральная последовательность Брауна-Герстена-Квиллена (спектральная BGQ -последовательность). Для произвольного многообразия X в [20] построена каноническая спектральная последовательность когомологического типа, называемая спектральной BGQ -последовательностью:

$$E_1^{p,q}(X) = \coprod_{x\in X^p} K_{-p-q}(F(x)) \Longrightarrow K'_{-p-q}(X) ,$$

где через X^p обозначено множество точек многообразия X, имеющих коразмерность p (под размерностью точки понимается размерность ее замыкания). Ассоциированная фильтрация на $K'_*(X)$ совпадает с фильтрацией по коразмерности носителя (называемой также топологической фильтрацией). Спектральная BGQ -последовательность контравариантна относительно плоских морфизмов. Кроме того, если $X = \varprojlim X_i$ где $i \mapsto X_i$ - направленная проективная система многообразий с плоскими аффинными морфизмами, то спектральная BGQ-последовательность для X является индуктивным пределом спектральных BGQ-последовательностей для X_i.

Для произвольного многообразия X обозначим через $C^p(X, K_q)$ группу $E_1^{p,-q}(X) = \coprod_{x \in X^p} K_{q-p}(F(x))$.

Дифференциалы члена E_1 превращают $C^*(X, K_q)$ в возрастающий комплекс, группы когомологий которого будем обозначать $H^p(X, K_q)$ и называть К-когомологиями многообразия X. Группа $H^p(X, K_p)$ канонически изоморфна группе Чжоу коразмерности p многообразия X (см. введение).

(I.I.2) Функториальные свойства. Любой плоский морфизм $f: X \longrightarrow Y$ индуцирует морфизм спектральных BGQ-последовательностей и, следовательно, гомоморфизм групп $f^*: H^p(Y, K_q) \longrightarrow H^p(X, K_q)$. Пусть теперь $f: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм. Рассмотрим гомоморфизм $\coprod_{x \in X^p} K_{q-p}(F(x)) \longrightarrow \coprod_{y \in Y^{p+n}} K_{q-p}(F(y))$ (где $n = \dim Y - \dim X$), который переводит элементы группы $K_{q-p}(F(x))$ в $K_{q-p}(F(f(x)))$ при помощи отображения нормы $N_{F(x)/F(f(x))}$, если $\dim x = \dim f(x)$, и в ноль в противном случае. Этот гомоморфизм определяет гомоморфизм комплексов $C^*(X, K_q) \longrightarrow C^{*+n}(Y, K_{q+n})$ и, следовательно, гомоморфизм групп когомологий

$$f_*: H^p(X, K_q) \longrightarrow H^{p+n}(Y, K_{q+n}).$$

В частности, пусть E/F – произвольное расширение полей, $f: X_E \longrightarrow X$ – проекция. Морфизм f является плоским;

индуцированный им гомоморфизм f^* обозначается $res_{E/F}$. Если расширение E/F конечно, то морфизм f собственный (точнее – конечный); возникающий гомоморфизм f_* обозначается $N_{E/F}$. Композиция $N_{E/F} \cdot res_{E/F}$ совпадает с умножением на степень расширения $[E:F]$.

(I.I.3) Вырезание. Пусть $i: Y \hookrightarrow X$ – замкнутое вложение коразмерности n, $j: U = X \setminus Y \hookrightarrow X$. Для каждого p множество X^p является дизъюнктным объединением множеств U^p и Y^{p-n}. Возникающая короткая точная последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow C^{*-n}(Y, K_{q-n}) \longrightarrow C^*(X, K_q) \longrightarrow C^*(U, K_q) \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность групп когомологий

$$\ldots \longrightarrow H^{p-n}(Y, K_{q-n}) \longrightarrow H^p(X, K_q) \longrightarrow H^p(U, K_q) \longrightarrow H^{p-n+1}(Y, K_{q-n}) \longrightarrow \ldots$$

В частности, получаем хорошо известную точную последовательность для групп Чжоу [11] :

$$CH^{p-n} Y \longrightarrow CH^p X \longrightarrow CH^p U \longrightarrow 0 .$$

(I.I.4) Спектральная последовательность, связанная с плоским морфизмом. Спектральная последовательность, которая будет сейчас получена, является частным случаем спектральной последовательности, построенной в [4] . Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – плоский морфизм многообразий. Введем на комплексе $C^*(X, K_n)$ фильтрацию, положив

$$F^iC^p(X,K_n) = \coprod_{x\in X^p,\ \mathrm{codim}_Y f(x)\geq i} K_{n-p}(F(x))$$

при каждых p, i. Эта фильтрация ограничена и согласована с дифференциалом комплекса, следовательно, индуцирует спектральную последовательность

$$E_1^{p,q}(n) = \coprod_{y\in Y^p} H^q(X_y, K_{n-p}) \Longrightarrow H^{p+q}(X,K_n) \quad ,$$

где X_y - слой морфизма f над точкой y. Полученная спектральная последовательность сосредоточена, очевидно, в пределах $0\leq p\leq \dim Y$, $0\leq q\leq \dim X - \dim \overline{f(X)}$, $p+q\leq n$.

(I.I.5) Расслоение над кривой. Пусть в условиях (I.I.4) многообразие Y неприводимо и $\dim Y = 1$. Тогда спектральная последовательность (I.I.4) сосредоточена в двух столбцах $p=0,1$, откуда возникает следующая точная последовательность групп когомологий:

$$\ldots \longrightarrow \coprod_{y\in Y^1} H^{p-1}(X_y, K_{q-1}) \xrightarrow{\Sigma(i_y)_*} H^p(X,K_q) \xrightarrow{j^*} H^p(X_\theta, K_q) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \coprod_{y\in Y^1} H^p(X_y, K_{q-1}) \longrightarrow \ldots$$

где θ - общая точка кривой Y, i_y - замкнутое вложение $X_y \hookrightarrow X$, $j: X_\theta \longrightarrow X$ - естественный плоский морфизм. В частности, для групп Чжоу получаем точную последовательность

$$\coprod_{y \in Y^1} CH^{p-1}X_y \longrightarrow CH^pX \longrightarrow CH^pX_\theta \longrightarrow 0 .$$

(1.1.6) ПРИМЕР. Полученная в (1.1.5) точная последовательность групп Чжоу будет многократно использоваться в следующей конкретной ситуации. Пусть $\mathcal{U}$ - аффинная квадрика, определенная в $\mathbb{A}^n_F$ уравнением

$$a_0 + a_1X_1^2 + \ldots + a_nX_n^2 = 0 \qquad (a_i \in F^*) .$$

Морфизм $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$, $(X_1, \ldots, X_n) \longmapsto X_1$ является плоским и дает ввиду (1.1.5) точную последовательность

$$\coprod_{y \in (\mathbb{A}^1)^1} CH^{p-1}\mathcal{U}_y \longrightarrow CH^p\mathcal{U} \longrightarrow CH^p\mathcal{U}_\theta \longrightarrow 0 .$$

Отметим, что слои $\mathcal{U}_\theta$ и $\mathcal{U}_y$ являются аффинными квадриками над полями $F(\mathbb{A}^1)$ и $F(y)$ соответственно, $\dim \mathcal{U}_\theta = \dim \mathcal{U}_y = \dim \mathcal{U} - 1$.

(1.1.7) Гомотопическая инвариантность. Пусть $\pi: X \longrightarrow Y$ - векторное расслоение. Тогда отображение $\pi^*: H^p(Y, K_q) \longrightarrow H^p(X, K_q)$ является изоморфизмом [23]. В частности, для аффинного пространства $\mathbb{A}^n_F$ получаем

$$H^p(\mathbb{A}^n_F, K_q) \simeq H^p(\operatorname{Spec} F, K_q) = \begin{cases} 0, & \text{если } p>0; \\ K_q(F), & \text{если } p=0 . \end{cases}$$

(1.1.8) Гладкие многообразия. Пусть $\mathcal{K}_q = \mathcal{K}_q(X)$ - пучок на многообразии X, ассоциированный с предпучком

$U \longmapsto K_q(U)$. Если X неособо, то группы когомологий $H^p(X, \mathcal{K}_q)$ пучка $\mathcal{K}_q$ канонически изоморфны группам $H^p(X, K_q)$ [20]. Это обстоятельство позволяет определить умножение в $H^*(X, K_*)$ и гомоморфизм обратного образа $f^*: H^p(Y, K_q) \longrightarrow H^p(X, K_q)$ для произвольного морфизма $f: X \longrightarrow Y$ в случае гладких многообразий следующим образом.

Мультипликативная структура. Умножение в К-теории определяет спаривание пучков $\mathcal{K}_q \times \mathcal{K}_{q'} \longrightarrow \mathcal{K}_{q+q'}$ и, следовательно, групп когомологий

$$H^p(X, \mathcal{K}_q) \times H^{p'}(X, \mathcal{K}_{q'}) \longrightarrow H^{p+p'}(X, \mathcal{K}_{q+q'}) .$$

Это спаривание определяет на группе $H^*(X, K_*)$ структуру биградуированного (коммутативного ассоциативного) кольца. В частности, возникает умножение на CH^*X, которое, как показал Грэйсон [14] с точностью до знака совпадает с классическим (см.введение).

Гомоморфизм обратного образа. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ - произвольный морфизм гладких многообразий. Естественный морфизм пучков $\mathcal{K}_q(Y) \longrightarrow f_*(\mathcal{K}_q(X))$ индуцирует отображение $f^*: H^p(Y, \mathcal{K}_q) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{K}_q)$. При этом $f^*: H^*(Y, K_*) \longrightarrow H^*(X, K_*)$ - гомоморфизм колец. Если морфизм f собственный, то f^* и f_* связаны формулой проекции: $f_*(f^*(y) \cdot x) = y \cdot f_*(x)$.

(I.I.9) Группа $H^0(X, K_1)$. Для неособого собственного неприводимого многообразия X естественный гомоморфизм $F^* \longrightarrow H^0(X, K_1)$ биективен, так как раскладывается в композицию изоморфизмов

$$F^* \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq H^1(X, \mathcal{K}_1) \simeq H^1(X, K_1) .$$

(I.I.10) К-когомологии проективного пространства P_F^n легко вычислить по индукции, используя точную последовательность вырезания (I.I.3) для тройки $P_F^{n-1} \hookrightarrow P_F^n \hookleftarrow A_F^n$ (см. также [22], [23]). Приведем ответ: $CH^*P^n \simeq \mathbb{Z}[t]/(t^{n+1})$, где t соответствует классу гиперплоскости в P^n (все гиперплоскости рационально эквивалентны); индуцированный умножением канонический гомоморфизм $CH^*P^n \otimes K_*(F) \longrightarrow H^*(P^n, K_*)$ является изоморфизмом.

§ 2. Простейшие сведения о группах Чжоу проективных квадрик

С этого момента будут рассматриваться только поля характеристики не равной 2. Пусть φ - невырожденная форма над полем F размерности $d+2$ $(d \geq 1)$, m - целая часть числа $(d+1)/2$. В дальнейшем всегда (кроме специально оговоренных случаев) буквой X будет обозначаться квадрика в проективном пространстве P_F^{d+1}, определенная формой φ (в частности, $\dim X = d$). Многообразие X неособо, поскольку φ невырождена; $CH^0X = \mathbb{Z}\cdot[X]$, так как X неприводимо. Пусть $h \in CH^1X$ - класс общего гиперплоского сечения (т.е. обратный образ гиперплоскости относительно вложения $X \hookrightarrow P_F^{d+1}$)

(I.2.I) Вычисление групп Чжоу квадрики в случае максимально расщепленной формы является классическим [16], [26]. Пусть $\varphi = X_0X_1 + \ldots$, Y - сечение квадрики X гиперплоскостью $X_0 = 0$. Тогда Y - особая квадрика на единицу меньшей размерности и $X \setminus Y \simeq \mathbb{A}^d_F$. Точная последовательность вырезания (1.1.3) сводит вопрос о группах Чжоу квадрики X к вопросу о группах Чжоу Y. Продолжая действовать подобным образом, сводим задачу к вычислению групп Чжоу проективного пространства (1.1.10). Приведем окончательный ответ. Пусть сперва d нечетно, $\varphi = X_0X_1 + \ldots + X_{d-1}X_d + X_{d+1}^2$. Квадрика X содержит $(m-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_F^{m-1}$ (определяемое, скажем, уравнениями $X_0 = X_2 = X_4 = \ldots = X_{d+1} = 0$) и вместе с ним проективные пространства всех меньших размерностей; пусть $\ell_p \in CH_pX$ – класс $\mathbb{P}^p \subset X$. Тогда $CH^pX = \mathbb{Z}\cdot h^p$, $CH_pX = \mathbb{Z}\cdot\ell_p$ для $p<m$. Если же d четно, $\varphi = X_0X_1 + \ldots + X_{d-2}X_{d-1} + X_dX_{d+1}$, то циклы

$$X_0 = X_2 = X_4 = \ldots = X_d = 0 \quad \text{и} \quad X_1 = X_2 = X_4 = \ldots = X_d = 0$$

неэквивалентны; пусть ℓ_m, ℓ_m' – их классы. Тогда $CH_mX = \mathbb{Z}\cdot\ell_m \oplus \mathbb{Z}\cdot\ell_m'$, а для $p<m$, по-прежнему, $CH^pX = \mathbb{Z}\cdot h^p$, $CH_pX = \mathbb{Z}\cdot\ell_p$. Отметим, что при $p<m$ элемент ℓ_p определен канонически (не зависит от выбора $\mathbb{P}^p \subset X$); элементы ℓ_m, ℓ_m' определены канонически с точностью до перестановки. Умножение в CH^*X описывается формулами

$$h\ell_p = \ell_{p-1}; \qquad h^m = \begin{cases} \ell_m + \ell_m', & \text{если } d \text{ четно;} \\ 2\ell_{m-1}, & \text{если } d \text{ нечетно}; \end{cases}$$

при четном d следует добавить формулы

$$h\ell_m = h\ell_m' = \ell_{m-1}; \quad \ell_m\ell_m' = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ четно,} \\ \ell_0, & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

(1.2.2). Редукция к анизотропному случаю. Вычисление групп Чжоу произвольных квадрик сводится к анизотропному случаю следующим приемом. Пусть $\varphi = n\cdot H \perp \psi$, где ψ – анизотропная часть, n — индекс Витта формы φ ; Y — неособая квадрика, соответствующая форме ψ $(\dim Y = d-2n)$. Будем обозначать через $\widetilde{X}$ квадрику X_E , где E/F — какое-либо полностью расщепляющее φ расширение. Тогда $CH^pX \xrightarrow{\sim} CH^p\widetilde{X}$, $CH_pX \xrightarrow{\sim} CH_p\widetilde{X}$ для $p<n$; $CH^pX \simeq CH^{p-n}Y$ для $p = n, n+1, \dots, d-n$. Проведем построение последнего изоморфизма. Пусть $\varphi = \psi + X_1X_1' + \dots + X_nX_n'$, $i: Z \hookrightarrow X$ замкнутое подмногообразие, определенное уравнениями $X_1' = X_2' = \dots = X_n' = 0$. Особая квадрика Z является конусом над Y с вершиной $\mathbb{P}^{n-1}$. Выкидывая вершину, получаем векторное расслоение $\pi: Z \setminus \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow Y$. Цепочка морфизмов

$$Y \xleftarrow{\pi} Z \setminus \mathbb{P}^{n-1} \xhookrightarrow{j} Z \xhookrightarrow{i} X$$

дает цепочку изоморфизмов

$$CH^{p-n}Y \xrightarrow[\sim]{\pi^*} CH^{p-n}(Z \setminus \mathbb{P}^{n-1}) \xleftarrow[\sim]{j^*} CH^{p-n}Z \xrightarrow[\sim]{i_*} CH^pX .$$

Для произвольной квадрики X можно найти нульмерную группу Чжоу CH_0X . Несложные вычисления на этот счет недавно опубликованы Суоном.

(I.2.3) ПРЕДЛОЖЕНИЕ [25] . Для любой проективной квадрики X гомоморфизм степени $\deg : CH_0X \longrightarrow \mathbb{Z}$ является вложением. Тем самым, если φ изотропна, то $CH_0X = \mathbb{Z}\cdot l_0 = \mathbb{Z}\cdot[x]$, где x — любая замкнутая рациональная точка; если φ анизотропна, то $CH_0X = \mathbb{Z}\cdot h^d = \mathbb{Z}\cdot[x]$, где x — любая замкнутая точка степени 2.

(I.2.4) СЛЕДСТВИЕ. Пусть U — аффинная квадрика $\varphi = a, a\in F^*$.

Если форма φ анизотропна, а форма $\varphi\perp\langle a\rangle$ изотропна, то $CH_0 U=\mathbb{Z}/2$. В остальных случаях $CH_0 U=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Использовать предложение (I.2.3) и точную последовательность $CH_0X \longrightarrow CH_0X' \longrightarrow CH_0U \longrightarrow 0$, где X и X' - проективные квадрики, соответствующие формам φ и $\varphi\perp\langle a\rangle$.

Для каждого p пусть $TCH^pX\subset CH^pX$ - подгруппа кручения, $\overline{CH}^pX = CH^pX/TCH^pX$.

(I.2.5) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Группа TCH^*X аннулируется умножением на некоторую степень двойки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем такое полностью расщепляющее φ расширение E/F, что $[E:F]=2^k$. Композиция $CH^*X \xrightarrow{res} CH^*X_E \xrightarrow{N} CH^*X$ совпадает с умножением на 2^k и $TCH^*X_E=0$.

В остальном строение группы TCH^*X весьма загадочно; в §4 главы Ш построена квадрика, для которой эта группа бесконечна (3.4.7).

Для произвольной квадрики X обозначим через $C^*(X)$ коядро вложения $\mathbb{Z}[h]/(h^{d+1}) \hookrightarrow \overline{CH}^*X$. Если d четно, то согласно (I.2.I), $C^m(\overline{X})$ является бесконечной циклической группой. Отметим, что $C^m(\overline{X})$ не имеет канонической образующей; $C^m(\overline{X})=\mathbb{Z}\cdot l_m=\mathbb{Z}\cdot l'_m$, $l_m=-l'_m$ в $C^m(\overline{X})$. Отождествим $C^m(X)$ с подгруппой в $C^m(\overline{X})$ при помощи вложения $res: C^m(X)\hookrightarrow C^m(\overline{X})$.

(I.2.6) ПРЕДЛОЖЕНИЕ [26]. Пусть X - квадрика без рациональных точек. Если $\varphi\notin I^2(F)$, то $C^*(X)=0$. Если $\varphi\in I^2(F)$, то $C^p(X)=0$ при $p\neq m$, а $C^m(X)=2^r C^m(\overline{X})$, где число $r=r(\varphi)$ заключено в пределах $1\leq r\leq m$.

Таким образом, учитывая приведенные выше результаты, приходим к заключению, что для вычисления группы CH^pX анизотропной квадрики X достаточно лишь вычислить 2-группу TCH^pX и, в случае $\varphi \in I^2(F)$, $p=m$, найти инвариант $\tau = \tau(\varphi)$.

Для вычисления группы классов дивизоров CH^1X нам потребуется

(I.2.7) ЛЕММА. Если E/F - расширение Галуа, то отображение $res : CH^1X \longrightarrow CH^1X_E$ является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем две точные последовательности G-модулей:

$$0 \longrightarrow H^0(X_E, K_1) \longrightarrow E(X_E)^* \longrightarrow P.\mathcal{D}iv X_E \longrightarrow 0 \qquad (I)$$

$$0 \longrightarrow P.\mathcal{D}iv X \longrightarrow \mathcal{D}iv X_E \longrightarrow CH^1X_E \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

где $\mathcal{D}iv$ $(P.\mathcal{D}iv)$ группа дивизоров (соответственно - главных дивизоров). Воспользовавшись (I.I.9), заменим в последовательности (I) группу $H^0(X_E, K_1)$ на E^*. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E^{*G} & \longrightarrow & E(X_E)^{*G} & \longrightarrow & (P.\mathcal{D}iv X_E)^G & \longrightarrow & H^1(G, E^*) \\
 & & \| & & \| & & & & \\
0 & \longrightarrow & F^* & \longrightarrow & F(X)^* & \longrightarrow & P.\mathcal{D}iv X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Верхняя строка этой диаграммы является началом длинной точной последовательности групп когомологий Галуа для (I). Группа $H^1(G, E^*)$ тривиальна по теореме Гильберта-90. Следовательно, $(P.\mathcal{D}iv X_E)^G = P.\mathcal{D}iv X$. Из (2) получаем

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (P.\,\mathrm{Div}\,X_E)^G & \longrightarrow & (\mathrm{Div}\,X_E)^G & \longrightarrow & (CH^1 X_E)^G & & \\
 & & \| & & \| & & & & \\
0 & \longrightarrow & P.\,\mathrm{Div}\,X & \longrightarrow & \mathrm{Div}\,X & \longrightarrow & CH^1 X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

что и дает требуемое утверждение.

(I.2.8) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Группа $CH^1 X$ кручения не содержит. Для анизотропной квадратичной поверхности, заданной формой из $I^2(F)$, инвариант τ равен I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение предложения тривиально, если квадрика изотропна. В анизотропном случае следует применить лемму (I.2.7) к какому-либо квадратичному расширению поля F, расщепляющему форму φ. Утверждение об инварианте τ следует из неравенств $1 \leq \tau \leq m$ (I.2.6), так как $m = 1$, если X – поверхность. Предложение доказано.

Пусть X – нерасщепленная квадратичная поверхность и $\varphi \in I^2(F)$. Несложно выписать уравнения, задающие образующую группы $C^1(X) = CH^1 X / \mathbb{Z}\cdot h$. Форма φ с точностью до пропорциональности имеет вид $X_0^2 - aX_1^2 - bX_2^2 + abX_3^2$, и $C^1(X)$ порождена классом простого цикла, определенного уравнениями $X_0^2 - aX_1^2 = 0$, $X_0X_2 - aX_1X_3 = 0$.

Завершим параграф двумя утверждениями о группах Чжоу некоторых аффинных квадрик.

(I.2.9) ЛЕММА. Пусть U – аффинная квадрика, заданная уравнением $\varphi = 0$. При всех $p < \dim U$ имеется канонический изоморфизм $CH^p U \simeq CH^p X / h \cdot CH^{p-1} X$, где, как всегда, X – проективная квадрика, определенная φ, $h \in CH^1 X$ – класс гиперплоского сечения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X' – проективная квадрика, соответствующая форме $\varphi\perp\langle 0\rangle$. Имеем точную последовательность $CH^{p-1}X \to CH^pX' \to CH^pU \to 0$ из (I.I.3) и изоморфизм $CH^pX' \simeq CH^pX$, построенный в (I.2.2). Осталось заметить, что композиция $CH^{p-1}X \to CH^pX' \xrightarrow{\sim} CH^pX$ совпадает с умножением на h.

(I.2.10) ЛЕММА. Пусть U – аффинная квадрика над полем $F(t)$, заданная уравнением $\varphi_{F(t)}=t$ (φ – по-прежнему квадратичная форма над полем F). Тогда $CH^pU=0$ при $p>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f\colon \mathbb{A}^n_F \to \mathbb{A}^1_F$ – морфизм, определенный формой φ. Морфизм f плоский; слой f над обшей точкой изоморфен U. Из (I.I.5) получаем точную последовательность $CH^p\mathbb{A}^n_F \to CH^pU \to 0$. Поскольку $CH^p\mathbb{A}^n_F=0$ при $p>0$, лемма доказана.

Г Л А В А II

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

§ I. Связь с кольцом Чжоу

Пусть $K = K(X)$ – группа Гротендика квадрики X. Многообразие X неособо, поэтому $K = K'_0(X) \simeq K_0(X)$. Тензорное произведение локально свободных пучков ($\mathcal{O}_X$-модулей) индуцирует на $K_0(X)$ структуру кольца, а группа $K'_0(X)$ имеет так называемую топологическую фильтрацию [20] . Поэтому K – кольцо с фильтрацией, причем известно, что эти структуры согласованы. Введем обозначения для фильтрации: $0 = K^{(d+1)} \subset K^{(d)} \subset$ $\subset \ldots \subset K^{(0)} = K$, где $K^{(p)} \subset K$ – подгруппа, порожденная классами пучков, у которых коразмерность носителя больше или равна p. Кроме того, положим $K_{(p)} = K^{(d-p)}$, $G^pK = G_{d-p}K =$ $= K^{(p)}/K^{(p+1)}$, и пусть $TG^pK \subset G^pK$ – подгруппа кручения, $\overline{G}^pK = G^pK/TG^pK$.

Любой простой цикл $Z \subset X$ определяет элемент в $K(X)$ – класс структурного пучка $\mathcal{O}_Z$, продолженного нулем на X. Возникающее отображение $CH^*X \to G^*K(X)$ является, как известно, эпиморфизмом градуированных колец.

(2.I.I) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Ядро естественного эпиморфизма градуированных колец $CH^*X \longrightarrow G^*K(X)$ содержится в TCH^*X.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Классы Чженя из $K(X)$ в CH^*X, построенные Гротендиком [15] , индуцируют для каждого p гомоморфизм групп $G^pK(X) \to CH^pX$; при этом композиция $CH^pX \to G^pK(X) \to$ $\to CH^pX$ совпадает с умножением на $(-1)^{p-1}(p-1)!$.

(2.I.2) ТЕОРЕМА. Ядро эпиморфизма $CH^pX \to G^pK(X)$ тривиально при $p = 0, 1, 2, 3, d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы для $p=d$ следует из отсутствия кручения в CH^dX (I.2.3) и предложения (2.I.I).

При любом p рассматриваемый эпиморфизм является, как известно, краевым эффектом спектральной BGQ -последовательности $E_2^{p,q} = H^p(X, K_{-q}) \Longrightarrow K'_{-p-q}(X)$. Поэтому утверждение теоремы для $p=0,1$ тривиально, так как в спектральной BGQ -последовательности нет ненулевых дифференциалов, входящих или выходящих из соответствующих членов. Для $p=2$ единственный дифференциал из $E_2^{0,-1} = H^0(X, K_1)$ в $E_2^{2,-2} = CH^2X$ равен нулю, так как $H^0(X, K_1) = F^*$ (I.I.9).

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству единственной нетривиальной части теоремы - случая $p=3$.

(2.I.3) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При $d \geqslant 3$ естественный гомоморфизм

$F^* = H^0(X, K_1) \otimes CH^1X \longrightarrow H^1(X, K_2)$ является изоморфизмом.

(2.I.4) ЛЕММА. Пусть X содержит рациональную точку. Тогда

$$F^* \xrightarrow{\sim} H^1(X, K_2) \quad , \quad K_2(F) \xrightarrow{\sim} H^0(X, K_2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi = X_0X_1 + \ldots$, Y - гиперплоское сечение $X_0=0$ квадрики X, $U = X \setminus Y \simeq \mathbb{A}^d_F$. Получаем диаграмму с точной строкой:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X,K_2) \arrow[r, "\beta"] & H^0(U,K_2) \arrow[r] & H^0(Y,K_1) \arrow[r] & H^1(X,K_2) \arrow[r] & H^1(U,K_2) \\
 & & K_2(F) \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[u, "\wr"] & F^* \arrow[u, "\wr"] & & 0 \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

где α - обратный образ структурного морфизма. Треугольник коммутативен, поэтому мономорфизм β сюръективен, и последовательность распадается на два изоморфизма. Лемма доказана.

Пусть теперь X без рациональных точек, E/F – такое квадратичное расширение, что φ_E изотропна. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[r, "\sim"] & H^1(X_E, K_2) \\ F^* \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & H^1(X, K_2) \arrow[u, "res"'] \end{tikzcd}$$

следует, что f – вложение. Более того, $\operatorname{Im} res \subset H^1(X_E, K_2)^G = E^{*G} = F^*$, где $G = Gal(E/F)$; поэтому гомоморфизм res дает расщепление мономорфизма f, и для доказательства предложения (2.I.3) достаточно доказать следующую лемму.

(2.I.5) ЛЕММА. Гомоморфизм

$$res_{E/F}: \quad H^1(X, K_2) \longrightarrow H^1(X_E, K_2)$$

инъективен для произвольного квадратичного расширения $E = F(\sqrt{a})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем два результата о квадратичных расширениях. Первый – теорема Гильберта-90 для K_2 [7]. Второй – следующее описание $(K_2(E))^G$ [19]: любой элемент $\mu \in (K_2(E))^G$ представляется в виде $\xi_E + \{\sqrt{a}, c\}$, где $\xi \in K_2(F)$, $c \in F_0^*$ (F_0 – замыкание в F простого подполя).

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_2 E \arrow[r] & K_2 E(X) \arrow[r, "d"] & \coprod_{x \in X_E^1} E(x)^* \\ & & K_2 F(X) \arrow[u, "r"] \arrow[r, "d"] & \coprod_{x \in X^1} F(x)^* \arrow[u, hook, "r"'] \end{tikzcd}$$

Пусть $\nu \in \coprod\limits_{x\in X^1} F(x)^*$, $\eta = r\nu$ и $\eta = d\mu$ для некоторого $\mu \in K_2E(X)$. Требуется найти $\xi \in K_2F(X)$, для которого $\nu = d\xi$. Пусть σ - образующая группы Галуа расширения E/F. Элемент η является σ-инвариантным, следовательно, $\mu - \sigma\mu \in \operatorname{Ker} d = K_2(E)$ (последнее равенство из леммы (2.I.4)). Так как $\mu - \sigma\mu \in \operatorname{Ker}\left(K_2E \xrightarrow{N} K_2F\right)$, то по теореме Гильберта-90 найдется такой $t \in K_2E$, что $\mu - \sigma\mu = t - \sigma t$. Заменим μ на $\mu - t$. Тогда, по-прежнему, $d\mu = \eta$ и, кроме того, теперь $\mu \in \left(K_2E(X)\right)^G$. Используя описание $\left(K_2E(X)\right)^G$ для квадратичного расширения $E(X)/F(X)$ и учитывая, что F алгебраически замкнуто в $F(X)$, получаем представление μ в виде $\mu = r\xi + \theta$, где $\xi \in K_2F(X)$, $\theta \in K_2E$. Теперь $r d\xi = d r\xi = \eta = r\nu$, откуда $d\xi = \nu$. Лемма (2.I.5) и предложение (2.I.3) доказаны.

(2.I.6) СЛЕДСТВИЕ. Для любой квадрики X все дифференциалы спектральной BGQ-последовательности, выходящие из членов $E_r^{1,-2}(X)$ при $r \geq 2$ равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d < 3$, доказывать нечего. Пусть $d \geq 3$. Имеем:

$$K_1^{(1/2)}(X) = E_\infty^{1,-2}(X) \hookrightarrow E_2^{1,-2}(X) = H^1(X, K_2).$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} K_1^{(1/2)}(X) \arrow[rr, hook] & & H^1(X, K_2) \\ & F^* \arrow[ul] \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

получаем $E_\infty^{1,-2}(X) = E_2^{1,-2}(X)$, что эквивалентно доказываемому утверждению.

Таким образом, доказана последняя оставшаяся часть теоремы

(2.I.2).

(2.I.7) СЛЕДСТВИЕ. Если X - квадрика размерности не выше 4, то отображение $CH^*X \longrightarrow G^*K(X)$ является изоморфизмом градуированных колец.

§ 2. Кручение первого и второго рода

К-теория квадрики и, в частности, группа Гротендика $K(X)$ вычислены Суоном [24]. Им построен канонический пучок $\mathcal{U}$ на X - локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль, обладающий структурой правого C_0-модуля, где $C_0 = C_0(\varphi)$ - четная часть алгебры Клиффорда квадратичной формы φ, и доказана

(2.2.I) ТЕОРЕМА [24]. Гомоморфизм групп $\mathbb{Z}^d \oplus K_0(C_0(\varphi)) \longrightarrow K(X)$, переводящий стандартные образующие группы $\mathbb{Z}^d$ соответственно в $[\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X(-1)], \ldots, [\mathcal{O}_X(-d+1)]$, а класс $[M] \in K_0(C_0(\varphi))$ левого модуля M над алгеброй $C_0(\varphi)$ в класс тензорного произведения $\mathcal{U} \otimes_{C_0} M$, является изоморфизмом.

Сформулируем в виде предложения некоторые основные свойства алгебры C_0, доказательства которых можно найти, например, в [1], [18].

(2.2.2) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Размерность алгебры C_0 над полем F равна 2^{d+1}. Кроме того,

I) если $\varphi \notin I(F)$, то C_0 - простая центральная F-алгебра;

2) если $\varphi \in I^2(F) \setminus I(F)$, то C_0 - простая алгебра с центром $F(\sqrt{d_\pm \varphi})$;

3) если, наконец, $\varphi \in I^2(F)$, то $C_0 \simeq A \times A$, где A - некоторая простая центральная F-алгебра.

(2.2.3) СЛЕДСТВИЕ. Пусть E/F - расширение одного из следующих типов:

I) алгебраическое (возможно, бесконечное) нечетной степени;

2) чисто трансцендентное.

Тогда гомоморфизм $res_{E/F}: G^*K(X) \longrightarrow G^*K(X_E)$ является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.2.I) и (2.2.2) согласованный с фильтрацией гомоморфизм $res_{E/F}: K(X) \longrightarrow K(X_E)$ биективен. Чтобы доказать, что индуцированный гомоморфизм ассоциированных градуированных групп тоже биективен, достаточно проверить лишь его инъективность или сюръективность. Если E/F - конечное расширение нечетной степени, то $res_{E/F}: G^*K(X) \longrightarrow G^*K(X_E)$ инъективен, так как композиция $N_{E/F} \cdot res_{E/F}$ есть умножение на нечетное число $[E:F]$. Для бесконечного нечетного алгебраического расширения инъективность res следует из перестановочности G^*K с проективными пределами (I.I.I). Пусть теперь E/F - чисто трансцендентное расширение. В этом случае докажем сюръективность $res_{E/F}$. Можем считать, что E - поле рациональных функций аффинной прямой $\mathbb{A}^1_F$. Докажем сначала сюръективность гомоморфизма $res_{E/F}: CH^*X \longrightarrow CH^*X_E$ на группах Чжоу. Для этого разложим его в композицию $CH^*X \longrightarrow CH^*(X \times \mathbb{A}^1_F) \longrightarrow CH^*X_E$. Первая стрелка - изоморфизм, ввиду гомотопической инвариантности групп Чжоу (I.I.7). Вторая стрелка совпадает с последним гомоморфизмом в точной последовательности (I.I.5), связанной с плоским морфизмом $pr: X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$, поэтому сюръективна. Сюръективность res на G^*K получается теперь из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} CH^*X & \longrightarrow & CH^*X_E \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^*K(X) & \longrightarrow & G^*K(X_E) \end{array} .$$

(2.2.4) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим число $s = s(\varphi)$ следующим образом. Если $\varphi \notin I^2(F)$, то, согласно предложению (2.2.2), C_0 - простая алгебра; поэтому, по теореме Веддербарна, $C_0 \simeq M_{2^s}(\mathcal{D})$ для некоторого тела $\mathcal{D}$ и целого неотрицательного s. Если же $\varphi \in I^2(F)$, то пусть s - такое число, что $A \simeq M_{2^s}(\mathcal{D})$, где $A \times A \simeq C_0$. Введенный инвариант s квадратичной формы φ удовлетворяет неравенствам $i(\varphi) \leqslant s(\varphi) \leqslant m$, где $i(\varphi)$ - индекс Витта.

(2.2.5) СЛЕДСТВИЕ. Имеются канонические изоморфизмы: $K_0(C_0) \simeq \mathbb{Z}$, если $\varphi \notin I^2(F)$; $K_0(C_0) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, если $\varphi \in I^2(F)$. При этом класс алгебры C_0 в $K_0(C_0)$ равен 2^s в первом случае и $2^s \oplus 2^s$ во втором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\varphi \notin I^2(F)$ группа $K_0(C_0)$ порождается классом единственного простого C_0-модуля P; при этом как левый модуль над собой C_0 изоморфна P^{2^s}. В случае $\varphi \in I^2(F)$ имеется ровно два неизоморфных простых C_0-модуля, скажем, P и P', один из которых - это простой A-модуль, превращенный в модуль над $C_0 \simeq A \times A$ посредством первой проекции $A \times A \to A$, другой - посредством второй проекции; $K_0(C_0) \simeq \mathbb{Z} \cdot [P] \oplus \mathbb{Z} \cdot [P']$ и $C_0 \simeq P^{2^s} \oplus P'^{2^s}$.

Из (2.2.I) и (2.2.5) получается

(2.2.6) СЛЕДСТВИЕ. Группа $K(X)$ не имеет кручения.

Обозначим через $h \in K^{(1)}(X)$ класс общего гиперплоского сечения, $\xi \in K(X)$ - класс пучка $\mathcal{O}_X(-1)$. Отметим, что $h = 1 - \xi$.

(2.2.7) ЛЕММА. Пусть $\mathcal{U}$ - пучок Суона на квадрике X. Тогда

$$[\mathcal{U}(d)] = h^d + 2h^{d-1} + \ldots + 2^{d-1}h + 2^d$$

в группе $K(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [24] построена резольвента пучка составленная из пучков $\mathcal{O}_X(-d+1), \ldots, \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1)$, которая дает в $K(X)$ равенство

$$[\mathcal{U}] = (C^0_{d+1} + C^1_{d+1} + \ldots + C^d_{d+1})\xi^{d-1} -$$

$$- (C^0_{d+1} + C^1_{d+1} + \ldots + C^{d-1}_{d+1})\xi^{d-2} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{d-2}(C^0_{d+1} + C^1_{d+1} + C^2_{d+1})\xi + (-1)^{d-1}(C^0_{d+1} + C^1_{d+1}) + (-1)^d C^0_{d+1}\xi^{-1}.$$

Отсюда

$$(1+\xi)[\mathcal{U}] = (2^{d+1}-1)\xi^d + (-1)^d\xi^{-1} -$$

$$- \sum_{k=1}^{d} C^k_{d+1}(-1)^{d+1-k}\xi^{k-1} = 2^{d+1}\xi^d$$

так как $(1-\xi)^{d+1} = h^{d+1} = 0$. Поэтому

$$(1+\xi)[\mathcal{U}(d)] = (1+\xi)[\mathcal{U}]\cdot\xi^{-d} = 2^{d+1}.$$

С другой стороны, $(h^d + \ldots + 2^d)(1+\xi) = 2^{d+1}$, так как $1+\xi = 2-h$. Расставляя двумя разными способами скобки в произведении $(h^d + \ldots + 2^d)(1+\xi)[\mathcal{U}(d)]$, получаем равенство $2^{d+1}[\mathcal{U}(d)] = (h^d + \ldots + 2^d)\cdot 2^{d+1}$. Так как в $K(X)$ нет кручения (2.2.6), лемма доказана.

Из (2.2.5), в частности, видно, что класс пучка Суона в группе K делится на 2^s. Следовательно, на 2^s делится также сумма $h^d + 2h^{d-1} + \ldots + 2^d$ из леммы (2.2.7), и поэтому корректно такое

(2.2.8) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим элементы $\ell_i \in K$ для $i = 0, 1, \ldots, s-1$ равенствами

$$\ell_i = \frac{1}{2^{i+1}}(h^d + 2h^{d-1} + \ldots + 2^i h^{d-i});$$

кроме того, положим для удобства $\ell_{-1} = 0$.

Геометрический смысл элементов ℓ_i объясняет

(2.2.9) ЛЕММА. Если форма φ , определяющая квадрику X, полностью расщеплена, то ℓ_j - это класс j-мерного проективного пространства $\mathbb{P}_F^j \subset X$ (ср. с элементами ℓ_j, введенными в (I.2.I)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа $K(X)$ не содержит кручения, достаточно проверить равенство

$$2^{j+1}[\mathbb{P}_F^j] = h^d + 2h^{d-1} + \ldots + 2^j h^{d-j} .$$

Поскольку гомоморфизм прямого образа $i_*: K(X) \longrightarrow K(\mathbb{P}_F^{d+1})$, где i - замкнутое вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}_F^{d+1}$, инъективен на подгруппе $H \subset K(X)$, выписанное равенство достаточно проверить после применения к обеим частям i_*. Непосредственно проверяется, что применение i_* к любой части равенства дает $2^{j+1}[\mathbb{P}_F^j] \in K(\mathbb{P}_F^{d+1})$.

(2.2.IO) ЛЕММА. Имеют место равенства

$$h\ell_i = \ell_{i-1}\ , \ 2\ell_i - \ell_{i-1} = h^{d-i} \qquad \text{для всех } i = 0,1,\ldots,s-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно из определения элементов ℓ_i .

(2.2.II) ЛЕММА. Пусть p_i - размерность элемента ℓ_i , т.е. такое число, что $\ell_i \in K_{(p_i)} \setminus K_{(p_i - 1)}$. Тогда $p_0 < p_1 < \ldots < p_{s-1}$, а если квадрика X не имеет рациональных точек, то, кроме того, $p_i > i$ для всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Размерность ℓ_{i-1} меньше размерности ℓ_i, так как $\ell_{i-1} = h\ell_i$, $h \in K^{(1)}$ и умножение в K согласовано с фильтрацией. Если квадрика не содержит рациональных точек, то $\ell_0 \notin K_{(0)}$ (например, в силу (I.2.3) и (2.I.2), хотя это легко доказать и непосредственно); отсюда $p_0 > 0$ и, следовательно, в силу первого утверждения леммы, $p_i > i$ при всех i .

В оставшейся части этого параграфа и дальше, в § 3 предполагается, что форма φ, определяющая квадрику X, анизотропна. Мотивировать это ограничение можно двумя способами. Во-первых, изучение топологической фильтрации предпринято здесь с целью приложения получаемых результатов к группе Чжоу квадрики, которую, как показано в (I.2.2), достаточно вычислить лишь в анизотропном случае. Второе объяснение более исчерпывающе: для групп $G^{\rho}K$ нетрудно получить (хотя мы этого и не будем делать) результат, аналогичный (I.2.2).

(2.2.I2) ЛЕММА. Элемент ℓ_i имеет в группе $G_{\rho_i}K$ порядок 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\ell_i \neq 0$. С другой стороны, по (2.2.I0) элемент $2\ell_i$ равен $h^{d-i} + \ell_{i-1}$ и, следовательно, лежит в $K_{(\rho_i - 1)}$, так как размерность ℓ_{i-1} меньше размерности ℓ_i, а размерность h^{d-i} – число i – меньше ρ_i по (2.2.II).

(2.2.I3) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем кручением первого рода градуированную подгруппу $\underline{I}_* \subset TG_*K$, определенную формулой

$$\underline{I}_\rho = \begin{cases} (\mathbb{Z}/2)\ell_i, & \text{если } \rho = \rho_i, \text{ где } i = 0, 1, \ldots, s-1; \\ 0 & \text{для остальных } \rho. \end{cases}$$

Кручением второго рода $\underline{II}_*$ назовем коядро вложения $\underline{I}_* \hookrightarrow TG_*K$.

Вычислить группу $\underline{I}_*$ для данной квадратичной формы φ означает, как видим, найти набор чисел $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{s-1}$ – размерности нетривиальных компонент этой группы. Эта задача в общем случае не решена. Набор чисел $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{s-1}$ является весьма тонким инвариантом формы φ. Например, теорема (2.5.3) означает, что $\rho_0 = 1$ (т.е. ρ_0 минимально), если и только если φ содержит собственную подформу, пропорциональную 2-форме Пфистера.

§ 3. Основные теоремы о кручении в факторгруппах

Пусть $H \subset K$ – подкольцо, порожденное элементом h. Очевидно, что $H = \mathbb{Z}[h]/(h^{d+1})$, причем фильтрация на H, индуцированная с K, есть фильтрация по степеням h: $H^{(p)} = \mathbb{Z}\cdot h^p \oplus \mathbb{Z}\cdot h^{p+1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\cdot h^d$. Поскольку $h = 1 - \xi$, подкольцо H порождается также элементом ξ и содержит $[\mathcal{O}_X(n)]$ для всех целых n.

Как уже было сказано, в этом параграфе предполагается, что форма φ анизотропна.

(2.3.1) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\varphi \notin I^2(F)$, то $\underline{\Pi}_* = 0$ (группа $\underline{\Pi}_*$ определена в (2.2.13)).

Таким образом, кручение в $G_* K$ совпадает с подгруппой кручения первого рода и имеет место

(2.3.2) ТЕОРЕМА. Пусть X – проективная квадрика, заданная анизотропной формой $\varphi \notin I^2(F)$; $p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}$ – определенные в (2.2.11) числа. Тогда

$$TG_p K(X) = \begin{cases} (\mathbb{Z}/2)^{t_i}, & \text{если } p = p_i, \text{ где } i = 0, 1, \ldots, s-1; \\ 0 & \text{для остальных } p. \end{cases}$$

В основе доказательства предложения (2.3.1) лежит следующая

(2.3.3) ЛЕММА. Если $\varphi \notin I^2(F)$, то K/H – группа порядка 2^s.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим композицию

$$\mathbb{Z}^d \oplus K_0(C_0(\varphi)) \xrightarrow[\sim]{} K \xrightarrow[\sim]{\xi^{-d}} K \longrightarrow K/H$$

изоморфизма Суона (2.2.1), d-кратного подкручивания и естественного отображения на факторгруппу. Слагаемое $\mathbb{Z}^d$ лежит в ядре, так как $[\mathcal{O}_X(n)] \in H$. Получаем эпиморфизм

$$\alpha:\ \mathbb{Z} \simeq K_0(C_0(\varphi)) \longrightarrow K/H \quad .$$

По лемме (2.2.7) $[\mathcal{U}(\alpha)] = h^{d} + 2h^{d-1} + \ldots + 2^{d}$ в группе K, поэтому $\alpha(2^{s}) = 0$ и, кроме того, $\alpha(2^{s-1}) \neq 0$, так как $[\mathcal{U}(\alpha)] = h^{d} + 2h^{d-1} + \ldots + 2^{d}$ не делится на 2 в H. Следовательно, $\ker\alpha = 2^{s}\mathbb{Z}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ (2.3.I). Снабдим факторгруппу K/H индуцированной с K фильтрацией. Пусть G_*H, $G_*(K/H)$ — ассоциированные градуированные группы. Точная последовательность $0 \to H \to K \to K/H \to 0$, поскольку фильтрации на крайних членах спущены со среднего, индуцирует точную последовательность градуированных групп: $0 \to G_*H \to G_*K \to G_*(K/H) \to 0$. Группа G_*H кручения не имеет, а $G_*(K/H)$ - группа порядка 2^{s} (2.3.3). Следовательно, порядок кручения в G_*K делит 2^{s}. Поскольку подгруппа кручения первого рода $\underline{I}_* \subset TG_*K$ имеет порядок 2^{s}, мы заключаем, что $\underline{I}_* = TG_*K$, т.е. $\underline{II}_* = 0$. Предложение (2.3.I) и теорема (2.3.2) доказаны.

Отметим, что точная последовательность $0 \to G_*H \to G_*K \to G_*(K/H) \to 0$, фигурирующая в доказательстве, имеет каноническое расщепление: поскольку подгруппа $G_*H \subset G_*K$ без кручения, то пересечение подгрупп $\underline{I}_* \subset G_*K$ и G_*H тривиально, и сужение эпиморфизма $G_*K \to G_*(K/H)$ на $\underline{I}_*$ дает мономорфизм $\underline{I}_* \hookrightarrow G_*(K/H)$, который, в действительности, биективен, так как порядки обеих групп равны. Кроме того, нетрудно построить расщепление слева: композиция $G_*H \hookrightarrow G_*K \to \bar{G}_*K$, где $\bar{G}_*K$ - факторгруппа по кручению, является, очевидно, изоморфизмом.

(2.3.4) ТЕОРЕМА. Пусть X – проективная квадрика, заданная анизотропной формой $\varphi \in I^2(F)$. Тогда группа $TG_*K(X)$ канонически образом разлагается в прямую сумму градуированных групп $\underline{I}_* \oplus \underline{II}_*$ и при этом:

I) $\underline{I}_*$ обладает теми же свойствами, что кручение в случае $\varphi \notin I^2(F)$, а именно

$$\underline{I}_\rho = \begin{cases} (\mathbb{Z}/2)\cdot \ell_i, & \text{если } \rho = \rho_i, \text{ где } i = 0, 1, \ldots, s-1; \\ 0 & \text{для остальных } \rho. \end{cases}$$

2) $\underline{II}_\rho$ – циклическая 2-группа при каждом ρ; $\underline{II}_\rho = 0$ при $\rho \leq m$ $(m = d/2)$; $|\underline{II}_*| = 2^t$, где $t = r + s - m \leq s$, $r = r(\varphi)$ – инвариант из (I.2.6).

3) Если $\underline{II}^0 = \underline{II}^1 = \ldots = \underline{II}^\rho = 0$ при некотором $\rho < m$, то $\underline{I}^0 = \underline{I}^1 = \ldots = \underline{I}^\rho = \underline{I}^{\rho+1} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группы $\underline{I}_*$ и $\underline{II}_*$ определены в (2.2.I3). Утверждение I теоремы содержится в определении группы $\underline{I}_*$. Требуется лишь доказать утверждения 2 и 3 и построить каноническое расщепление точной последовательности

$$0 \longrightarrow \underline{I}_* \longrightarrow TG_*K \longrightarrow \underline{II}_* \longrightarrow 0$$

Пусть P – любой (из двух) простой $C_0(\varphi)$-модуль; элемент $u = [\,\mathcal{U} \otimes_{C_0} P\,] \in K$ будем называть образующей Суона. Обозначим через L подгруппу $H + \mathbb{Z} \cdot \frac{[\mathcal{U}]}{2^s} = H + \mathbb{Z} \cdot \ell_{s-1}$ в K с индуцированной фильтрацией.

(2.3.5) ЛЕММА. I) Факторгруппа K/L – это бесконечная циклическая группа, порожденная элементом u.

2) Ассоциированная градуированная группа G_*L является прямой суммой $G_*H \oplus \underline{I}_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение I – следствие теоремы Суона (2.2.I). Утверждение 2 доказывается точно так же, как и теорема (2.3.2).

Продолжаем доказывать теорему. Снабдим факторгруппу K/L индуцированной фильтрацией и рассмотрим ассоциированную градуированную группу $G_*(K/L)$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow G_* L \longrightarrow G_* K \longrightarrow G_*(K/L) \longrightarrow 0$$

получаем изоморфизм $G_*(K/L) \simeq G_*K/(G_*H \oplus \underline{I}_*)$. Следовательно, кручение второго рода $\underline{II}_*$ изоморфно подгруппе кручения в $G_*(K/L)$. Поскольку группа K/L циклическая, то и $\underline{II}_p$ - циклическая группа при каждом p. Согласно (I.2.6) факторгруппа $G_m K/G_m H$ содержит элемент бесконечного порядка; ввиду изоморфизма $G_m(K/L) \simeq G_m K/(G_m H \oplus \underline{I}_m)$, то же можно сказать и о группе $G_m(K/L)$. Поэтому $G_m(K/L)$ - бесконечная циклическая группа, а группа $G_p(K/L)$ при $p<m$ тривиальна. Следовательно, $\underline{II}_p = 0$ при $p \leqslant m$.

Группа $G_m(K/L)$ порождена элементом au где a - натуральное число, при этом порядок кручения в $G_*(K/L)$ равен a, т.е. $|\underline{II}_*| = a$. Для доказательства утверждения теоремы о порядке кручения второго рода рассмотрим вложение $K(X) \hookrightarrow K(\tilde{X})$, где $\tilde{X} = X_E$ для какого-либо расширения E/F, полностью расщепляющего квадрику X. Пусть $\tilde{u} \in K(\tilde{X})$ — та (из двух) образующая Суона, для которой $2^{m-s}\tilde{u} = u$.

(2.3.6) ЛЕММА. Группа $G_m(K(\tilde{X})/H)$ бесконечная циклическая и порождена элементом $\tilde{u}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow G_* H \longrightarrow G_* K(\tilde{X}) \longrightarrow G_*(K(\tilde{X})/H) \longrightarrow 0$$

и (I.2.I) получаем, что $G_m(K(\tilde{X})/H)$ - бесконечная циклическая группа и, кроме того, $G_p(K(\tilde{X})/H) = 0$ при $p > m$. Поскольку элемент $\tilde{u}$ порождает факторгруппу $K(\tilde{X})/H$ по модулю кручения, он же порождает и $G_m(K(\tilde{X})/H)$. Лемма доказана.

Число 2^{τ}, где $\tau = \tau(\varphi)$ - инвариант из (I.2.6), является, очевидно, порядком коядра гомоморфизма $G_m(K/H) \longrightarrow G_m(K(\tilde{X})/H)$. Левая группа порождена по модулю кручения элементом au, образ которого под действием этого гомоморфизма равен $a \cdot 2^{m-s}\tilde{u}$, так как $u = 2^{m-s}\tilde{u}$. Тем самым, $2^{\tau} = a2^{m-s}$, откуда $\Pi_* = a = 2^{m-s-\tau}$.

Переходим к доказательству утверждения 3 теоремы. Пусть $\ell_m \in K_{(m)}(\tilde{X})$ - класс какого-либо m-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^m$, содержащегося в $\tilde{X}$. Отметим, что ℓ_m, в отличие от ℓ_j при $j<m$, не является линейной комбинацией степеней h (с рациональными коэффициентами) и зависит от выбора $\mathbb{P}^m \subset \tilde{X}$. Можно показать (хотя мы этого не будем делать, так как это утверждение не будет использоваться), что множество всех m-мерных проективных пространств, лежащих в $\tilde{X}$, разбивается относительно рациональной эквивалентности (циклов) на два класса: два проективных пространства $\mathbb{P}_1^m$ и $\mathbb{P}_2^m$ рационально эквивалентны, если и только если число $m - \dim(\mathbb{P}_1^m \cap \mathbb{P}_2^m)$ четно (ср. с элементами ℓ_m и $\ell'_m \in CH_m\tilde{X}$ из (I.2.I)).

(2.3.7) ЛЕММА. Произведение $h\ell_m$ равно ℓ_{m-1}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу проекции к замкнутому вложению $i: \mathbb{P}^m \hookrightarrow \tilde{X}$, получаем

$$h\ell_m = h \cdot i_*[\mathbb{P}^m] = i_*(i^*(h)\cdot[\mathbb{P}^m]) = i_*[\mathbb{P}^{m-1}].$$

Так как $i_*[\mathbb{P}^{m-1}] = \ell_{m-1}$ (2.2.9), лемма доказана.

Из теоремы Суона (2.2.I) $2^{m-s}K(\tilde{X}) \subset K$. Положим $\ell = 2^{m-s}\ell_m \in K$.

(2.3.8) ЛЕММА. $\dim \ell \geqslant m$, $\dim 2^s\ell = m$, $\dim \ell_{s-1} < \dim \ell$ $\ell \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\ell_m \in \mathfrak{G}_m K(\tilde{X})$ - элемент бесконечного порядка (I.2.I), то $\dim \ell \geqslant m$ и, более того, $\dim c\ell \geqslant m$ для любого целого c. Если расширение E/F, для которого $\tilde{X} = X_E$, выбрать так, чтобы степень $[E:F]$ делила 2^m, то применяя отображение нормы $N_{E/F}: K_{(m)}(\tilde{X}) \longrightarrow K_{(m)}$ к элементу ℓ_m, получаем $2^m\ell_m = 2^s\ell \in K_{(m)}$. Наконец,

$$h\ell = h(2^{m-s}\ell_m) = 2^{m-s}\ell_{m-1} \equiv \ell_{s-1} \pmod{H_{(m-1)}},$$

откуда $\dim \ell_{s-1} < \dim \ell$. Лемма доказана.

Пусть $\overline{I}_p$ – нетривиальная компонента кручения первого рода максимальной размерности, и предположим, что $p \geqslant m$. Для доказательства утверждения 3 теоремы достаточно найти число $q > p$, для которого $TG_qK \neq 0$. Как видно из определения $\overline{I}_*$ (2.2.13) $p = \dim \ell_{s-1}$. Положим $q = \dim \ell$. Тогда $q > p$ по лемме (2.3.8), и группа G_qK содержит нетривиальный элемент ℓ, причем $2^s\ell = 0$ (2.3.8). Следовательно, $TG_qK \neq 0$, и утверждение 3 доказано.

Переходим к заключительной части доказательства теоремы – к расщеплению последовательности $0 \to \overline{I}_* \to TG_*K \to \overline{II}_* \to 0$. Пусть $\rho = \varphi_{F(t)} \perp \langle -t \rangle$ – квадратичная форма над полем $F(t)$ (t – свободная переменная); T – проективная квадрика над полем $F(t)$, соответствующая форме ρ.

(2.3.9) ЛЕММА. Гомоморфизм $TG_*K(X) \to TG_*K(T)$ сюръективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм $G_pK(X) \to G_pK(T)$ является композицией двух: изоморфизма $G_pK(X) \xrightarrow{\sim} G_pK(X_{F(t)})$ (2.2.3) и отображения $G_pK(X_{F(t)}) \to G_pK(T)$, индуцированного замкнутым вложением $X_{F(t)} \hookrightarrow T$. Аффинная квадрика $U = T \setminus X_{F(t)}$ задается над полем $F(t)$ уравнением $\varphi_{F(t)} = t$, следовательно, по лемме (1.2.10), $CH_pU = 0$ при $p \neq \dim U$. Из точной последовательности

$$CH_pX_{F(t)} \longrightarrow CH_pT \longrightarrow CH_pU \longrightarrow 0$$

при тех же p получаем, что $CH_pX_{F(t)} \to CH_pT$ – эпиморфизм; из коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} CH_p X_{F(t)} \arrow[r] \arrow[d] & CH_p T \arrow[d] \\ G_pK(X_{F(t)}) \arrow[r] & G_pK(T) \end{tikzcd}$$

- что $G_pK(X_{F(t)}) \to G_pK(T)$ - тоже. Итак, $G_pK(X) \to G_pK(T)$ - эпиморфизм при $p \neq \dim T$, а, следовательно, $TG_pK(X) \to TG_pK(T)$ - эпиморфизм при всех p. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, расщепим мономорфизм $I_* \hookrightarrow TG_*K(X)$. Для этого рассмотрим композицию

$$I_* \xrightarrow{\alpha} TG_*K(X) \xrightarrow{\beta} TG_*K(T)$$

Размерность формы ρ, определяющей квадрику T, нечетна, так что, в частности, $\rho \notin I^2(F(t))$. Следовательно, по теореме (2.3.2), при каждом p группа $TG_pK(T)$ либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}/2$. Поэтому β будет расщеплением для α, если будет доказана

(2.3.10) ЛЕММА. Композиция $\beta\circ\alpha$ инъективна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $s(\rho)=s(\varphi)+1$. Поэтому количество нетривиальных компонент в $TG_*K(T)$ на 1 больше, чем в $I_* \subset TG_*K(X)$, и для доказательства инъективности композиции $\beta\circ\alpha$ достаточно показать, что $TG_*K(T)$ порождается $(\beta\circ\alpha)(I_*)$ и элементом $\beta(\ell)$ (определение элемента ℓ находится сразу после леммы (2.3.7)). Поскольку β - эпиморфизм (2.3.9), то в сформулированном утверждении можно заменить $TG_*K(T)$ на $\operatorname{Im}\beta$. Докажем то, что получилось. Если $x \in TG_*K(X)$ - произвольный однородный элемент, то $x=\ell_p$ $(p<s)$ или $x=2^p\ell$. В первом случае проблем нет, так как $\ell_p \in \operatorname{Im}\alpha$. Случай $x=\ell$ тоже не требует разбора. Осталось разобраться со случаем $x=2^p\ell$ при положительном p.

отображение $K(X) \to K(T)$ переводит элементы $\ell = 2^{m-s}\ell_m$ и $\ell' = 2^{m-s}\ell'_m$ в $2^{m-s}\ell_m$ и $\ell_m + \ell'_m - \ell_{m-1} = h^m \in K(\tilde{X})$. Поэтому $\beta(x) = \beta(2 \cdot 2^{p-1}\ell) = \beta(2^{p-1}\ell + 2^{p-1}\ell') = \beta(2^{p-1}\ell_{s-1}) = \beta(\ell_{s-p})$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы (2.3.4) закончено.

(2.3.II) СЛЕДСТВИЕ. Для любой анизотропной формы φ группа $G_*K(X)$ не имеет кручения, если и только если $s(\varphi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s(\varphi) > 0$, то уже кручение первого рода $\underline{I}_* \subset TG_*K(X)$ нетривиально. Если $s(\varphi) = 0$, то $\underline{I}_* = 0$; в случае $\varphi \notin I^2(F)$ это означает, что $TG_*K(X) = 0$, так как $\underline{I}_* = TG_*K(X)$ (2.3.I); в случае $\varphi \in I^2(F)$ кручение второго рода $\underline{II}_*$ тоже тривиально, так как $|\underline{II}_*| \leq |\underline{I}_*|$ (2.3.4).

(2.3.I2) ПРИМЕР. Пусть p - натуральное число, причем $p < m$, если m нечетно. Если форма φ анизотропна и для некоторого квадратичного расширения E/F индекс Витта формы φ_E больше p, то $TG_pK(X) \simeq \mathbb{Z}/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p < m$, применяя отображение нормы к элементу $\ell_p \in K_{(p)}(X_E)$, получаем элемент $2\ell_p$, откуда $\ell_{p-1} = 2\ell_p - h^{d-p} \in K_{(p)}(X)$ и, следовательно, $TG_pK(X) = (\mathbb{Z}/2)\,\ell_{p-1}$. При $p = m$ (если m четно) имеем $N_{E/F}(\ell_m) = \ell_m + \ell'_m$, откуда $\ell_{m-1} = \ell_m + \ell'_m - h^m \in K_{(m)}(X)$.

В условиях примера, если, скажем,

$$\varphi = b_0(X_0^2 - aY_0^2) + b_1(X_1^2 - aY_1^2) + \ldots + b_p(X_p^2 - aY_p^2) + \psi(T_j),$$

то ненулевой элемент кручения в группе $G_pK(X)$ равен $[Z] - h^{d-p}$, где Z - простой цикл на X, заданный уравнениями $X_iX_j - aY_iY_j = 0$ $(i = 0,1,\ldots,p)$, $T_k = 0$ (для всех k) (количество уравнений больше коразмерности потому, что Z не является локально полным пересечением).

Отметим, что $\xi = [Z] - h^{d-p} \in CH_pX$ - тоже элемент второго порядка: $2\zeta = 0$, так как $res_{E/F}(\zeta) = 0$; $\zeta \neq 0$ в группе Чжоу, поскольку это так в группе $G_p K(X)$.

(2.3.13) Цикл "двойная прямая". Рассмотрим следующий важный частный случай примера (2.3.12). Пусть форма φ анизотропна, имеет размерность большую 4 и содержит подформу, пропорциональную 2-форме Пфистера. Можно считать, что $\varphi = X_0^2 - aX_1^2 - bX_2^2 + abX_3^2 + \psi(T_j)$, заменив φ на пропорциональную ей форму. Пусть Z - кривая на X, определенная уравнениями $X_0^2 - aX_1^2 = 0$, $X_0X_2 - aX_1X_3 = 0$, $T_j = 0$ для всех j. Одномерный простой цикл Z будем называть циклом "двойная прямая" (поскольку над алгебраическим замыканием Z распадается в объединение двух скрещивающихся прямых). Из (2.3.12) следуют следующие свойства этого цикла:

1) $TG_1K(X) = (\mathbb{Z}/2)\cdot([Z] - h^{d-1})$;

2) $[Z] - h^{d-1} \in CH_1X$ - элемент 2-го порядка.

§ 4. Квадрики размерностей 3 и 4

Применим результаты предыдущего параграфа для вычисления $G^*K(X)$ в случае $\dim X = 3, 4$. Для таких квадрик отображение $CH^*X \longrightarrow G^*K(X)$ является изоморфизмом (2.1.7), поэтому одновременно будет вычислено кольцо Чжоу. Поскольку наша цель в получении результатов именно о кольце Чжоу, в формулировках теорем будем писать CH^pX вместо $G^pK(X)$. Отметим, что кольцо Чжоу коники и квадратичной поверхности определяется результатами § 2 главы I.

Начнем со вспомогательных утверждений.

(2.4.1) ЛЕММА [18]. Для любой нечетномерной квадратичной формы φ в группе Брауэра $Br(F)$ поля F выполнено равенство:

$$[C_0(\varphi)] = [C(\varphi \perp \langle -d_\pm \varphi\rangle)].$$

(2.4.2) СЛЕДСТВИЕ. Для нечетномерной формы φ следующие утверждения эквивалентны:

1) $[C_0(\varphi)] = 0 \in Br(F)$;

2) $\varphi \perp \langle -d_\pm \varphi\rangle \in I^3(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\varphi \perp \langle -d_\pm \varphi\rangle \in I^2(F)$, а гомоморфизм $I^2(F)/I^3(F) \longrightarrow {}_2Br(F)$, $\varphi \longmapsto [C(\varphi)]$ является изоморфизмом [6].

(2.4.3) ТЕОРЕМА. Пусть X - 3-мерная квадрика без рациональных точек. Если $\varphi \sim \langle\langle a, b\rangle\rangle \perp \langle c\rangle$, то $TCH^2X \simeq \mathbb{Z}/2$; в противном случае, $TCH^2X = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы (2.3.2), учитывая, что $TCH^1X = 0$, (1.2.8), получаем: $TCH^2X \simeq \mathbb{Z}/2$, если $s(\varphi) > 0$; $TCH^2X = 0$, если $s(\varphi) = 0$. Условие $s(\varphi) > 0$ означает, что $[C_0(\varphi_E)] = 0$ в $Br(E)$ для некоторого квадратичного расширения $E = F(\sqrt{a})$, т.е. $(\varphi \perp \langle -d_\pm \varphi\rangle)_E \in I^3(E)$ (2.4.2). Поскольку размерность формы $\varphi \perp \langle -d_\pm \varphi\rangle$ равна $6 < 2^3$, последнее соотношение означает, что форма $(\varphi \perp \langle -d_\pm \varphi\rangle)_E$ гиперболическая [13], т.е. индекс Витта формы φ_E равен 2. Отсюда $\varphi \sim \langle\langle a, b\rangle\rangle \perp \langle c\rangle$ для некоторых $b, c \in F^*$. Теорема доказана.

Отметим, что образующая кручения в CH^2X из теоремы (2.4.3) построена в (2.3.13).

Переходим к изучению 4-мерных квадрик.

(2.4.4) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть φ - 6-мерная анизотропная форма. Тогда

I. Если $d_{\pm}\varphi = -\det\varphi = 1$, то $s(\varphi) = 0$.

II. Если $-\det\varphi \neq 1$, то

1) $s(\varphi) = 2 \iff \varphi \simeq \langle\langle a\rangle\rangle \otimes \langle b_1, b_2, b_3\rangle$;

2) $s(\varphi) = 1 \iff \varphi \sim \langle\langle a, b\rangle\rangle \perp \langle c_1, c_2\rangle$, причем $cd \notin D(\langle -a, -b, ab\rangle)$;

3) $s(\varphi) = 0 \iff \varphi$ не содержит 4-мерных подформ определителя I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi = \langle -1\rangle \perp \psi$. Тогда $C_0(\varphi) \simeq C(\psi)$ [18].

I. Пусть $-\det\varphi = 1$. В этом случае $C(\psi) \simeq C_0(\psi) \times C_0(\psi)$, откуда $s(\varphi) = s(\psi)$. Если $s > 0$, то, как было показано при доказательстве теоремы (2.4.3), форма ψ содержит 4-мерную подформу определителя I и, следовательно, представляет I (так как $\det\psi = 1$), что противоречит анизотропности формы φ.

II. Пусть $-\det\varphi \neq 1$. Тогда $C(\psi) \simeq C_0(\psi) \otimes_F E$, где $E = F(\sqrt{-\det\varphi})$; кроме того, $\psi_E \perp \langle -\det\psi_E\rangle = \varphi_E$.

1) Условие $s = 2$ означает, что форма φ_E гиперболическая, т.е. $\varphi \simeq \langle\langle a\rangle\rangle \otimes \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, где $a = -\det\varphi$.

2) Если $s = 1$, то φ_E изотропна, и, следовательно, φ содержит 4-мерную подформу определителя I.

3) Утверждение 3 - простое следствие утверждений I и 2.

Используя теоремы (2.3.2), (2.3.4) и пример (2.3.12) получаем теорему:

(2.4.5) ТЕОРЕМА. Пусть X - 4-мерная квадрика без рациональных точек. Тогда

I. Если $-\det\varphi = 1$, то CH^*X кручения не имеет, а инвариант $\tau(\varphi)$ равен 2.

II. Если $-\det\varphi \neq 1$, то

в случае I предложения (2.4.4) $TCH^2X \simeq \mathbb{Z}/2 \simeq TCH^3X$;

в случае 2 $\qquad TCH^2X = 0 \;, \; TCH^3X \simeq \mathbb{Z}/2 \;;$

в случае 3 кручения нет.

Отметим, что образующие возникающего кручения построены в (2.3.I2). Приведем уравнения, задающие образующую факторгруппы $CH^2X/(\mathbb{Z}\cdot h^2)$, когда $-\det\varphi = 1$.

(2.4.6) ДОПОЛНЕНИЕ. Если $\varphi = a_0X_0^2 + a_1X_1^2 + \ldots + a_5X_5^2$ анизотропна и $a_0a_1\ldots a_5 = -1$, то второй образующей группы CH^2X (наряду с h^2) является класс замкнутого подмногообразия, определенного уравнениями:

$$a_0X_0^2 + a_1X_1^2 = 0 \;, \quad a_2X_2^2 + a_3X_3^2 = 0 \;, \quad X_0X_2X_4 + a_1a_3a_5X_1X_3X_5 = 0$$

(ср. с уравнениями из (I.2.8)).

В заключение параграфа заготовим утверждение о группе Чжоу некоторой аффинной квадрики, которое понадобится в следующей главе.

(2.4.7) ЛЕММА. Если U - аффинная квадрика над полем F, заданная уравнением $\langle\langle a,b\rangle\rangle = c$, где $a, b \in F^*$, $c \in F$, то $CH^2U = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $c \neq 0$, напишем точную последовательность $CH^1Y \to CH^2X \to CH^2U \to 0$, где X, Y - проективные квадрики, соответствующие формам $\langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle -c\rangle$ и $\langle\langle a,b\rangle\rangle$. Если форма $\langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle -c\rangle$ анизотропна, то $CH^2X = \mathbb{Z}\cdot h^2 \oplus \mathbb{Z}/2$; если $\langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle -c\rangle$ изотропна, а форма $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ - нет, то $CH^2X = \mathbb{Z}\cdot h^2$; наконец, если $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ изотропна, то $CH^2X = \mathbb{Z}\cdot l_1$. Во всех трех случаях очевидно, что образующие группы CH^2X приходят с CH^1Y ; поэтому $CH^2U = \operatorname{Coker}(CH^1Y \to CH^2X) = 0$.

Если же $c = 0$, то, согласно (I.2.9), $CH^2U \simeq CH^2Y/h\cdot CH^1Y$. Если $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ анизотропна, то $CH^2Y = \mathbb{Z}\cdot h^2$ (I.2.3), $h^2 \in h\cdot CH^1Y$. Если $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ изотропна, то полностью расщеплена и $CH^2Y = \mathbb{Z}\cdot l_1$,

$\ell_0 \in h \cdot CH^1 Y$, так как $\ell_1 \in CH^1 Y$ (I.2.I). Лемма доказана.

§ 5. Факторгруппа размерности I

Основной результат этого параграфа - теорема (2.5.3). В ее доказательстве используются обозначения для элементов группы $K(X)$, введенные в §§ I,2.

(2.5.I) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что квадратичная форма φ обладает свойством R, если $\dim\varphi \geqslant 5$ и существует такое конечное расширение E/F нечетной степени, что φ_E содержит подформу, пропорциональную 2-форме Пфистера (иначе говоря, 4-мерную подформу определителя I).

(2.5.2) ЗАМЕЧАНИЕ. Скажем, что форма φ размерности не меньшей 5, обладает свойством R', если уже сама φ содержит 4-мерную подформу определителя I. Свойства R и R' эквивалентны, если $\dim\varphi = 5, 6$. Однако можно привести пример 7-мерной формы, обладающей R, но не обладающей R'.

(2.5.3) ТЕОРЕМА. Пусть X - проективная квадрика, заданная некоторой квадратичной формой φ. Если φ анизотропна и обладает R, то $TG_1K(X) \simeq \mathbb{Z}/2$. В остальных случаях $TG_1K(X) = 0$.

Для доказательства нам понадобится одна лемма, относящаяся к группе Чжоу произвольного многообразия.

(2.5.4) ЛЕММА. Пусть X - произвольное многообразие над F, Z - простой цикл на X, E/F - конечное расширение, причем $E \subset F(Z)$. Тогда $[Z] = N_{E/F}([T]) \in CH^*X$ для некоторого простого цикла T на X_E.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с аффинного случая. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$.

Обозначим через $\mathfrak{p}$ простой идеал кольца A, соответствующий Z. Морфизм $X_E \to X$ индуцирован вложением $A \hookrightarrow B = A \otimes_F E$. При этом B - конечно порожденный A-модуль, в частности, $A \hookrightarrow B$ - целое расширение колец, поэтому $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$. Пусть T - простой цикл на X_E, соответствующий $\mathfrak{q}$. Тогда $N([T]) = [E(T) : F(Z)] \times [Z]$. Кольцо B порождено над A элементами из E; поэтому $E(T)$ также порождено над $F(Z)$ элементами из E. Так как при этом $E \subset F(Z)$, то, следовательно, $E(T) = F(Z)$, откуда $N([T]) = [Z]$. В общем случае пусть U - открытое аффинное множество, пересекающее Z, T' - простой цикл на U_E, для которого $N([T']) = [Z \cap U]$, T - замыкание T' в X_E. Тогда $N([T]) = [Z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Снова X - проективная квадрика, определенная φ. Согласно (2.2.3) мы можем считать, что основное поле не имеет нечетных расширений.

Тогда свойство R превращается в R'. Если φ анизотропна и обладает R', то $TG_1K(X) \simeq \mathbb{Z}/2$ согласно (2.3.12). Если φ изотропна, то, очевидно, $TG_1K(X) = 0$.

Пусть φ анизотропна и $TG_1K(X) \neq 0$. Тогда из теорем (2.3.2) и (2.3.4) $TG_1K(X) \simeq \mathbb{Z}/2$, и нам остается доказать, что в этом случае φ обладает R'. Доказательство будем вести индукцией по $\dim\varphi$. База - $\dim\varphi = 5$ - теорема (2.4.3). Пусть $\dim\varphi \geq 6$, Y - произвольное гиперплоское сечение квадрики X. Сечение Y само является квадрикой, соответствующей некоторой подформе ψ формы φ коразмерности I. Отметим, что ψ невырождена, ввиду анизотропности формы φ, а квадрика Y, тем самым, неособа. Если $TG_1K(Y) \neq 0$, то по индукционному предположению ψ обладает R', откуда φ также обладает R'. Далее считаем, что $TG_1K(Y) = 0$. Положим

$U = X \setminus Y$. Для квадрики без рациональных точек группа $\bar{G}_1 K$ (факторгруппа $G^1 K$ по кручению) равна $\mathbb{Z} \cdot k^{d-1}$ и точная последовательность

$$0 \longrightarrow TG_1 K \longrightarrow G_1 K \longrightarrow \bar{G}_1 K \longrightarrow 0$$

имеет каноническое расщепление $\bar{G}_1 K \hookrightarrow G_1 K$, $k^{d-1} \longmapsto k^{d-1}$, которое дает каноническое разложение $G_1 K \simeq TG_1 K \oplus \bar{G}_1 K$. В дальнейшем стрелка $G_1 K \longrightarrow TG_1 K$ всегда будет обозначать соответствующую проекцию. Коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{tikzcd}
CH_1 Y \arrow[r] \arrow[d] & CH_1 X \arrow[r] \arrow[d] & CH_1 U \arrow[r] & 0 \\
G_1 K(Y) \arrow[r] & G_1 K(X) \arrow[r] & TG_1 K(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

дает эпиморфизм $\alpha : CH_1 U \longrightarrow TG_1 K(X)$ (нижняя строка диаграммы точна, так как $G_1 K(Y)$ не имеет кручения). Кроме того, определив как в (I.I.6) морфизм $U \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$ и написав для него точную последовательность

$$\coprod_{x \in (\mathbb{A}^1)^1} CH_1 U_x \longrightarrow CH_1 U \longrightarrow CH_0 U_\theta \longrightarrow 0 \quad ,$$

учитывая, что $CH_0 U_\theta = 0$ по (I.2.4), получаем эпиморфизм $\beta : \coprod CH_1 U_x \longrightarrow CH_1 U$. Группа $\coprod CH_1 U_x$ порождена всевозможными парами $(x, [Z])$, где x - замкнутая точка аффинной прямой, Z - простой цикл на U_x. Поэтому для некоторой такой пары получим $(\alpha \circ \beta)(x, [Z]) \neq 0$. Морфизм $U_x \hookrightarrow U$ является замкнутым вложением и $\beta(x,[Z]) = [Z]$

(в правой части равенства Z рассматривается как цикл на U). Пусть $\overline{Z}$ - замыкание Z в X. Тогда $f([\overline{Z}]) \neq 0$, где f - композиция $CH_1X \longrightarrow G_1K(X) \longrightarrow TG_1K(X)$, как явствует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & CH_1U_x \arrow[d] & \ni [Z] \\
{[\overline{Z}]} \in CH_1X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & CH_1U \arrow[d] & \ni [Z] \\
G_1K(X) \arrow[r] & TG_1K(X) &
\end{tikzcd}$$

.

Если $\deg x = 1$, то U_x - гиперплоское сечение аффинной квадрики U. Пусть Y' - замыкание U_x в X. Тогда Y' - гиперплоское сечение X и $\overline{Z} \subset Y'$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
{[\overline{Z}]} \in CH_1Y' \arrow[r] \arrow[d] & CH_1X \arrow[d] & \ni [\overline{Z}] \\
G_1K(Y') \arrow[r] & G_1K(X) \arrow[r] & TG_1K(X)
\end{tikzcd}$$

получаем, что $TG_1K(Y') \neq 0$, откуда (по индукционному предположению) φ обладает R'. Осталось разобрать случай $\deg x \geqslant 2$. Имеем: $F \subset F(x) \subset F(\overline{Z})$. Пусть E/F - подрасширение в $F(x)/F$ степени 2 (такое подрасширение существует, так как $[F(x):F]$ - степень двойки в силу ограничения, наложенного на F в начале доказательства теоремы). Докажем, что $i(\varphi_E) \geqslant 2$. По лемме (2.5.4) $[\overline{Z}] \in Im(N: CH_1X_E \longrightarrow CH_1X)$. Образ $[\overline{Z}]$ в $TG_1K(X)$ отличен от нуля, поэтому образ $[\overline{Z}]$ в $G_1K(X)$ равен $\overline{l_0 + nh^{d-1}}$ для некоторого целого n.

Из коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd}
CH_1 X_E \arrow[r] \arrow[d] & G_1 K(X_E) \arrow[d] \\
CH_1 X \arrow[r] & G_1 K(X)
\end{tikzcd}$$

получаем, что $\overline{l_0 + nh^{d-1}} \in \mathrm{Im}\,(N\colon G_1K(X_E) \longrightarrow G_1K(X))$, т.е., поскольку группа $K_{(0)}(X)$ порождена элементом $2l_0$, при некотором целом j элемент $x = (2j+1)\,l_0 + nh^{d-1}$ лежит в $\mathrm{Im}\,(N\colon K_{(1)}(X_E) \longrightarrow K_{(1)}(X))$. Предположим, что $l_1 \notin K_{(1)}(X_E)$. Тогда любой элемент из $K_{(1)}(X_E)$ имеет вид $al_0 + bh^{d-1}$ и $N(al_0 + bh^{d-1}) = 2al_0 + 2bh^{d-1}$, откуда $x \notin N(K_{(1)}(X_E))$. Следовательно, $l_1 \in K_{(1)}(X_E)$, т.е. $i(\varphi_E) \geqslant 2$, и φ обладает R'. Теорема доказана.

ГЛАВА III

КОЛЬЦО ЧЖОУ

§ I. Группа Чжоу коразмерности 2

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

(3.I.I) ТЕОРЕМА. Пусть X - проективная квадрика, заданная невырожденной квадратичной формой φ. Если φ анизотропна, пропорциональна подформе некоторой 3-формы Пфистера и $\dim\varphi > 4$, то $TCH^2X \simeq \mathbb{Z}/2$. В остальных случаях $TCH^2X = 0$. В частности, кручение в CH^2X отсутствует, если $\dim\varphi > 8$.

Доказательство начнем с изотропного случая.

(3.I.2) ЛЕММА. Если форма φ изотропна, то $TCH^2X = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi \simeq \mathbb{H} \perp \psi$, то, ввиду (I.2.2), $CH^2X \simeq CH^1Y$, где Y - проективная квадрика, определенная формой ψ; по (I.2.8) группа CH^1Y кручения не имеет.

Далее в этом параграфе считаем, что φ - анизотропная квадратичная форма. Если $\dim\varphi = 4$, то $TCH^2X = 0$ согласно (I.2.3). Случаи $\dim\varphi = 5$ и $\dim\varphi = 6$ получаются из теорем (2.4.3), (2.4.5) и двух следующих лемм.

(3.I.3) ЛЕММА. Для 5-мерной анизотропной квадратичной формы φ следующие утверждения эквивалентны:

а) форма φ пропорциональна форме вида $\langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle -c\rangle$;

б) форма φ пропорциональна подформе некоторой 3-формы Пфистера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация из а) в б) тривиальна, так как

$\langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle -c\rangle \subset \langle\langle a,b,c\rangle\rangle$. Докажем обратную импликацию. Пусть $\varphi \perp \langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle\langle a,b,c\rangle\rangle$, $L = F(\sqrt{-a_2a_3})$. Над полем L левая часть есть $\varphi_L \perp \langle a_1\rangle \perp \mathbb{H}$, а правая – $\mathbb{H}^4$. Отсюда $i(\varphi_L) = 2$, и, следовательно, над полем F форма φ пропорциональна форме указанного вида.

(3.I.4) ЛЕММА. Для 6-мерной анизотропной квадратичной формы φ следующие утверждения эквивалентны:

а) форма φ пропорциональна форме вида $\langle\langle a\rangle\rangle \otimes \langle 1, -b, -c\rangle$;

б) форма φ пропорциональна подформе некоторой 3-формы Пфистера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация из а) в б) тривиальна, так как $\langle\langle a\rangle\rangle \otimes \langle 1,-b,-c\rangle \subset \langle\langle a,b,c\rangle\rangle$. Если $\varphi \perp \langle a_1, a_2\rangle = \langle\langle a,b,c\rangle\rangle$ и $L = F(\sqrt{-a_1a_2})$, то форма φ_L гиперболическая, следовательно, над полем F форма φ пропорциональна форме указанного вида.

В доказательстве теоремы осталось разобрать случай, когда φ – анизотропная квадратичная форма, размерности большей 6. Сперва несколько вспомогательных утверждений.

(3.I.5) ЛЕММА [18]. Пусть ρ – анизотропная квадратичная форма над полем F, $L = F(y_0, y_1, \dots, y_n)$, и предположим, что $a_0y_0^2 + a_1y_1^2 + \dots + a_ny_n^2 \in D(\rho_L)$ для некоторых $a_i \in F^*$. Тогда $\langle a_0, a_1, \dots, a_n\rangle \subset \rho$.

(3.I.6) СЛЕДСТВИЕ. Пусть ρ – анизотропная квадратичная форма над полем F, $E = F(y_1, y_2, \dots, y_n)$, и предположим, что $a_0 + a_1y_1^2 + \dots + a_ny_n^2 \in D(\rho_E)$ для некоторых $a_i \in F^*$. Тогда $\langle a_0, a_1, \dots, a_n\rangle \subset \rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = E(y_0)$. Очевидно, что

$$a_0 + a_1\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 + a_2\left(\frac{y_2}{y_0}\right)^2 + \dots + a_n\left(\frac{y_n}{y_0}\right)^2 \in D(\rho_L).$$

Домножим на y^2 и воспользуемся леммой (3.I.5).

(3.I.7) ЛЕММА [18]. Пусть ρ – форма Пфистера над полем F, ρ' – ее чистая подформа, $a \in F^*$. Следующие утверждения эквивалентны:

а) форма $\rho_{F(\sqrt{a})}$ расщеплена;

б) $-a \in D(\rho')$.

(3.I.8) ЛЕММА. Пусть n – нечетное натуральное число, ρ – $2n$-мерная анизотропная квадратичная форма над полем F, и предположим, что существует квадратичное расширение L/F, полностью расщепляющее ρ. Тогда $L = F(\sqrt{-\det \rho})$; в частности, $\det \rho \neq -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = F(\sqrt{a})$. Тогда $\rho \simeq \langle\langle a \rangle\rangle \otimes \rho'$ для некоторой квадратичной формы ρ'. Осталось заметить, что

$$\det(\langle\langle a \rangle\rangle \otimes \rho') = (-a)^n \cdot (\det \rho')^2 = -a.$$

(3.I.9) ЛЕММА. Пусть U – аффинная квадрика $\rho = c$, $c \in F$, где ρ – квадратичная форма над F размерности больше 4. Тогда $CH^1 U = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через T' проективное замыкание аффинной квадрики U, через T – проективную квадрику $T' \setminus U$ (T задается ρ). Для $c \neq 0$ утверждение леммы получается из точной последовательности

$$\begin{array}{ccccccc} CH^0 T & \longrightarrow & CH^1 T' & \longrightarrow & CH^1 U & \longrightarrow & 0 \\ \Psi & & \Psi & & & & \\ [T] & \longmapsto & h & & & & \end{array}$$

если учесть, что $CH^1 T'$ порождается элементом h (здесь требуется лишь неравенство $\dim \rho > 3$). Если же $c=0$, то по (I.2.9) $CH^1 U \simeq CH^1 T / h \cdot CH^0 T$, что равно нулю, так как $CH^1 T$ тоже порождена h (здесь существенно, что $\dim \rho \neq 4$).

(3.I.10) ЛЕММА. Пусть U - аффинная квадрика над полем F, определенная уравнением

$$a_0 + a_1 Y_1^2 + \ldots + a_n Y_n^2 + b_1 X_1^2 + \ldots + b_5 X_5^2 = 0 ;$$

V - 4-мерная аффинная квадрика над полем $F(y_1, \ldots, y_n)$, заданная уравнением

$$(a_0 + a_1 y_1^2 + \ldots + a_n y_n^2) + b_1 X_1^2 + \ldots + b_5 X_5^2 = 0 .$$

Тогда естественный эпиморфизм $CH^2 U \to CH^2 V$ является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Морфизм $\pi : U \to \mathbb{A}^1_F$, $(Y_1, \ldots, Y_n, X_1, \ldots, X_5) \mapsto Y_1$ дает, согласно (I.I.6), точную последовательность

$$\coprod_{t \in (\mathbb{A}^1)^1} CH^1 U_t \to CH^2 U \to CH^2 \widetilde{U} \to 0 ,$$

где U_t - слой морфизма π над замкнутой точкой t, $\widetilde{U}$ - слой над общей точкой. Слой $\widetilde{U}$ есть квадрика над полем $F(y_1)$, заданная уравнением $(a_0 + a_1 y_1^2) + a_2 Y_2^2 + \ldots = 0$. Поскольку по лемме (3.I.9) $CH^1 U_t = 0$ для всех t, получаем изоморфизм $CH^2 U \to CH^2 \widetilde{U}$. Продолжая действовать подобным образом, через n шагов получим доказываемое утверждение.

Продолжаем доказательство теоремы. Пусть

$$\varphi = a_0 Y_0^2 + a_1 Y_1^2 + \ldots + a_n Y_n^2 + b_1 X_1^2 + \ldots + b_5 X_5^2 \quad (n \geq 1),$$

Y - гиперплоское сечение $Y_0 = 0$ квадрики X, $U = X \setminus Y$. Из точной последовательности $CH^1 Y \to CH^2 X \to CH^2 U \to 0$ получаем $TCH^2 X \simeq CH^2 U$; по лемме (3.I.10) $CH^2 U \simeq$ $\simeq CH^2 V$ и, далее, $CH^2 V \simeq TCH^2 X'$, где X' - 4-мерная проективная квадрика над полем $F(y_1, \ldots, y_n)$, соответствующая анизотропной форме

$$\psi = (a_0 + a_1 y_1^2 + \ldots + a_n y_n^2) X_0^2 + b_1 X_1^2 + \ldots + b_5 X_5^2 .$$

Так как $\det \psi \neq -1$, то из теоремы (2.4.5) $TCH^2 X' \simeq \mathbb{Z}/2$, если ψ полностью расщепляется в некотором квадратичном расширении; в противном случае $TCH^2 X' = 0$. Последним шагом в доказательстве теоремы является

(3.I.II) ЛЕММА. Следующие утверждения равносильны:

а) ψ полностью расщепляется в некотором квадратичном расширении;

б) φ пропорциональна подформе некоторой 3-формы Пфистера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $L = F(y_1, \ldots, y_n)$, $E = L(\sqrt{-\det \psi})$. Покажем, что а) влечет б). Для этого рассмотрим квадратичную форму $\chi = \langle -b_1 \ldots b_5, b_1, \ldots, b_5 \rangle$ над полем F. Ее определитель равен -I, и, кроме того, $\chi_E \simeq \psi_E$. По лемме (3.I.8), примененной к расширению E/L, форма ψ_E гиперболична, откуда, по той же лемме, форма χ_L изотропна. Следовательно, над полем F форма χ также изотропна, откуда

$\langle b_1, \dots, b_5\rangle \sim \langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle -c\rangle$. Можем считать, что

$$\psi = \langle (a_0 + a_1 y_1^2 + \dots + a_n y_n^2),\ 1,\ -a,\ -b,\ ab,\ -c\rangle .$$

Подформа $\langle\langle a,b\rangle\rangle_L \subset \psi_L$ имеет размерность больше $(\dim\psi)/2$, поэтому обязана расщепиться при присоединении к L корня из $-\det\psi = c(a_0 + a_1 y_1^2 + \dots + a_n y_n^2)$. Следовательно, по лемме (3.I.7), $\det\psi \in D(\langle -a,-b,ab\rangle_L)$, т.е.

$$a_0 + a_1 y_1^2 + \dots + a_n y_n^2 \in D(\langle ac,\ bc,\ -abc\rangle_L) .$$

Последнее включение означает (3.I.6), что $\langle a_0, a_1, \dots, a_n\rangle \subset \subset \langle ac,\ bc,\ -abc\rangle$, и мы получаем, что $\varphi \subset \langle\langle a,b,c\rangle\rangle$.

Обратная импликация б) $\Longrightarrow$ а), тривиальна.

(3.I.I2) Образующая кручения. Взяв формулы для кручения в CH^2 4-мерной квадрики и пройдя через использованные в доказательстве теоремы (3.I.I) многочисленные изоморфизмы, можно указать нетривиальный элемент кручения $\xi_X \in TCH^2X$. Пусть Q - проективная квадрика, заданная анизотропной 3-формой Пфистера $X_0^2 - aX_1^2 - bX_2^2 + abX_3^2 - c(Y_0^2 - aY_1^2 - bY_2^2 + abY_3^2)$. Тогда $\xi_Q = [Z] - 2h^2$, где Z - простой цикл, определенный уравнениями

$$X_0^2 - aX_1^2 - bX_2^2 + abX_3^2 = 0 ,$$
$$X_0Y_0 - aX_1Y_1 - bX_2Y_2 + abX_3Y_3 = 0 ,$$
$$X_0Y_3 - X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_3Y_0 = 0 .$$

В общем случае, если φ - подформа в $\langle\langle a,b,c\rangle\rangle$ размерности большей 4, то $\xi_X = i^*(\xi_Q)$, где i^* - обратный образ относительно замкнутого вложения $i: X \hookrightarrow Q$.

§ 2. Квадрики размерностей 5 и 6

Используя теоремы (2.3.2), (2.5.3) и (3.I.I), получаем вычисление $G^*K(X)$ для 5-мерной квадрики.

(3.2.I) ТЕОРЕМА. Пусть X – 5-мерная проективная квадрика, заданная анизотропной формой φ. Тогда в $G^*K(X)$ возможны следующие варианты распределения кручения (символ $*$ в таблице означает $\mathbb{Z}/2$):

коразмерность \ условие на φ	$s(\varphi)=0$	$s(\varphi)=1$, φ обладает R	$s(\varphi)=1$, φ не обладает R	$s(\varphi)=2$	$s(\varphi)=3$
2	0	0	0	0	$*$
3	0	0	$*$	$*$	$*$
4	0	$*$	0	$*$	$*$

(3.2.2) ПРИМЕР. Пусть $\varphi = a_0X_0^2 + \ldots + a_5X_5^2 + bX_6^2$ – анизотропная форма и $a_0a_1\ldots a_5 = -1$. Тогда $s(\varphi)=1$. Пусть Z – простой цикл на X, заданный уравнениями

$$a_0X_0^2 + a_1X_1^2 = 0, \quad a_2X_2^2 + a_3X_3^2 = 0, \quad X_0X_2X_4 + a_1a_3a_5X_1X_3X_5 = 0, \quad X_6 = 0$$

(ср. с уравнениями из (2.4.6)). Тогда $[Z] = 4\ell_1 \in G^3K(X)$; если φ не обладает R, то $[Z]-2h^3$ – нетривиальный эл-нт кручения.

Для 6-мерных квадрик удается вычислить $G^*K(X)$, если определитель формы φ равен I.

(3.2.3) ТЕОРЕМА. Пусть X – 6-мерная проективная квадрика, заданная анизотропной формой φ определителя I. В $G^*K(X)$ возможны следующие варианты распределения кручения:

	условие на φ				
коразмерность	$s(\varphi)=0$	$s(\varphi)=1$, φ обладает R	$s(\varphi)=1$, φ не обладает R	$s(\varphi)=2$	$s(\varphi)=3$
2	0	0	0	0	*
3	0	0	0	0	*
4	0	0	*	*	*
5	0	*	0	*	*

Отметим, что кручение второго рода возникает только в случае $s(\varphi)=3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s(\varphi)=3$, то φ пропорциональна 3-форме Пфистера и достаточно воспользоваться утверждениями (2.3.12) и (3.1.1). Если $s(\varphi)=0$, то кручение нет в силу (2.3.11). Оставшуюся часть доказательства разобьем на несколько лемм. Ниже предполагается, что основное поле не имеет расширений нечетной степени.

(3.2.4) ЛЕММА. Если $s(\varphi)=2$, где φ - 8-мерная анизотропная форма определителя 1, то φ обладает R'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E/F - какое-нибудь квадратичное расширение, расщепляющее φ: $\varphi_E \simeq \mathbb{H} \perp \psi$. Тогда $s(\psi) = s(\varphi_E) - 1 \geqslant 1$, и, следовательно, ψ изотропна (2.4.4). Поэтому $i(\varphi_E) \geqslant 2$ и φ обладает R'.

(3.2.5) ЛЕММА. В условиях (3.2.4) φ делится на $\langle\langle a\rangle\rangle$ для некоторого $a \in F^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.2.4) $\varphi = f\cdot\langle\langle b_1, b_2\rangle\rangle \perp g\cdot\langle\langle c_1, c_2\rangle\rangle$, откуда

$$[C(\varphi)] = \left[\left(\frac{b_1, b_2}{F}\right) \otimes_F \left(\frac{c_1, c_2}{F}\right) \right] \in Br(F).$$

Так как $s(\varphi) = 2$, выписанное тензорное произведение кватернионных алгебр не является телом, т.е. форма $\langle b_1, b_2, -b_1 b_2, -c_1, -c_2, c_1 c_2 \rangle$ изотропна [18]. Последнее означает, что существует элемент $a \in F^*$, являющийся значением чистых подформ обеих 2-форм Пфистера, откуда φ делится на $\langle\langle a \rangle\rangle$.

Лемма (3.2.5) доказывает теорему для случая $s(\varphi) = 2$. Последний оставшийся случай $s(\varphi) = 1$ обслуживают теорема (2.5.3) и следующая

(3.2.6) ЛЕММА. Если $s(\varphi) = 1$, то $l_0 \in K_{(2)}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ψ – какая-нибудь 7-мерная подформа формы φ, Y – соответствующее гиперплоское сечение, то $s(\psi) = s(\varphi) = 1$ и по теореме (3.2.1) $l_0 \in K_{(2)}(Y)$. Применив отображение $K_{(2)}(Y) \longrightarrow K_{(2)}(X)$, получаем, что $l_0 \in K_{(2)}(X)$.

Теорема доказана.

§ 3. Группа Чжоу коразмерности 3

(3.3.1) ТЕОРЕМА. Для любой проективной квадрики X группа TCH^3X есть 0 или $\mathbb{Z}/2$.

Сперва вспомогательная

(3.3.2) ЛЕММА. Пусть ψ – 8-мерная квадратичная форма над F, и предположим, что для некоторого квадратичного расширения L/F форма ψ_L пропорциональна 3-форме Пфистера. Тогда существует такое квадратичное расширение L'/F, что $i(\psi_{L'}) \geqslant 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ψ изотропна, то ψ_L гиперболична, и в качестве L' можно взять само L. В анизотропном случае пусть ρ – какая-либо 7-мерная подформа формы ψ и $\psi' = \rho \perp \langle \det \rho \rangle$. Если ψ' изотропна, то L/F расщепляет ψ, а значит, расщепляет полностью, и мы опять берем $L' = L$. Если же ψ' анизотропна, то воспользуемся леммой (3.2.5). Поскольку $s(\psi') \geqslant 2$, мы заключаем, что ψ' полностью расщепляется в некотором квадратичном расширении L'/F. Ясно, что для этого расширения $i(\psi_{L'}) \geqslant 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Если форма φ, определяющая квадрику X, изотропна, то группа CH^3X изоморфна группе CH^2 некоторой квадрики, и можно применить теорему (3.I.I). Далее считаем, что φ анизотропна.

Согласно (2.I.2), $CH^3X \simeq G^3K(X)$. Если $\varphi \notin I^2(F)$, то по теореме (2.3.2) группа $TG^3K(X)$ есть 0 или $\mathbb{Z}/2$. Далее считаем, что $\varphi \in I^2(F)$.

Если четное число $\dim\varphi$ не превосходит 8, то, ввиду (2.3.4), кручение второго рода отсутствует в коразмерности 3; следовательно, и в этом случае теорема доказана. Далее считаем, что $\dim\varphi \geqslant 10$.

Группы $G^0K(X)$, $G^1K(X)$, $G^2K(X)$ не содержат кручения (последняя – по теореме (3.I.I)), следовательно, по теореме (2.3.4), $\bar{I}^3 = 0$ и $TG^3K(X) = \bar{II}^3$ – циклическая группа. Осталось доказать, что эта группа аннулируется умножением на 2. Для этого рассмотрим какое-либо квадратичное расширение L/F. Композиция $TCH^3X \xrightarrow{res} TCH^3X_L \xrightarrow{N} TCH^3X$ есть умножение на 2, и доказательство теоремы завершится, как только мы убедимся, что средняя группа тривиальна при подходящем выборе L. Пусть L/F расщепляет ψ; $\varphi_L = \mathbb{H} \perp \psi_L$, где $\psi \subset \varphi$, Y – квадрика, соответствующая ψ. Тогда $CH^3 X_L \simeq CH^2 Y_L$. Так как $\dim \psi = \dim \varphi - 2 \geqslant 8$, то по теореме (3.I.I) группа $TCH^2 Y_L$ может быть нетривиальна лишь в случае, если ψ_L пропорциональна 3-форме Пфистера. Предположим, что это так. Тогда по лемме (3.3.2) существует квадратичное расширение L'/F, для которого $i(\psi_{L'}) \geqslant 3$. Раз $\psi \subset \varphi$, то $i(\varphi_{L'}) \geqslant 3$ также. Отсюда $TCH^3 X_{L'} = 0$ по (I.2.2) (достаточно неравенства $i(\varphi_{L'}) \geqslant 2$). Теорема доказана.

Вопрос описания квадрик, имеющих нетривиальную группу TCH^3 остается открытым. Не известно даже, равна ли эта группа нулю для всех квадрик достаточно большой размерности.

§ 4. Появление бесконечного кручения

Заметим, что пока нам не встретилось ни одного примера, чтобы группа $TCH^p X$, будучи нетривиальной, оказалась чем-либо иным, кроме как $\mathbb{Z}/2$. Возникает естественное предположение, что для любого p и любой квадрики X группа $TCH^p X$ всегда есть 0 или $\mathbb{Z}/2$. Это предположение было опровергнуто А.С.Меркурьевым: ему удалось обнаружить в группе Чжоу $CH^4 Q$ некоторой 5-мерной квадрики Q два различных элемента второго порядка. А именно, им была доказана следующая

(3.4.I) ТЕОРЕМА [4]. Пусть F – поле, содержащее квадратный корень из -1; Q – 5-мерная проективная квадрика над полем F, заданная формой $\langle 1, -a, -b, ab, -c, -d, cd \rangle$, где $a, b, c, d \in F^*$; $\xi_1, \xi_2 \in TCH^4 Q$ – элементы кручения, соответствующие 2-подформам Пфистера $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ и $\langle\langle c,d\rangle\rangle$ в смысле (2.3.13). Тогда следующие утверждения равносильны:

а) $\xi_1 = \xi_2$;

б) форма $\langle\langle a,b,c,d\rangle\rangle$ расщеплена.

Взяв поле F, над которым имеется нерасщепленная 4-форма Пфистера, получим обещанный контрпример. Отметим, что образы элементов ξ_1 и ξ_2 под действием гомоморфизма $CH^4Q \longrightarrow G^4K(Q)$ равны. Поэтому мы получаем также пример, когда естественный эпиморфизм $CH^p \longrightarrow G^pK$ имеет нетривиальное ядро (ср. с (2.1.2)).

Хотя сформулированное предположение и было опровергнуто, оставалась все же еще надежда, что группа TCH^p квадрики по крайней мере конечна (или, что то же самое, группа Чжоу конечно порождена). Цель настоящего параграфа в построении примеров, разрушающих и эту последнюю надежду. Основной результат — теорема (3.4.7) — не оставляет, по мнению автора, шансов вычислить группу Чжоу произвольной квадрики.

Переходим к изложению материала. Пусть поле F содержит $\sqrt{-1}$; $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$; φ' — квадратичная форма $\langle a_1, a_2, a_1a_2, b_1, b_2, b_1b_2\rangle$; $\varphi = \langle 1\rangle \perp \varphi'$; U — аффинная квадрика над полем F, определенная уравнением $\varphi' = -1$.

(3.4.2) ЛЕММА. При $p = 1,2,3$ группа CH^pU тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X и X' — проективные квадрики, заданные формами φ и φ' соответственно. Из точной последовательности $CH^{p-1}X' \longrightarrow CH^pX \longrightarrow CH^pU \longrightarrow 0$ при $p=1$ сразу получаем, что $CH^1U = 0$, так как по (1.2.8) $CH^1X = \mathbb{Z}\cdot h$ и $h \in \operatorname{Im}(CH^0X' \longrightarrow CH^1X)$. При $p=2$ эта точная последовательность показывает, что $CH^2U \neq 0$ только в том случае, если $TCH^2X \neq 0$. Пусть $TCH^2X \neq 0$. Тогда, согласно (3.1.1), форма φ анизотропна и пропорциональна подформе 3-формы Пфистера, откуда получаем, что $\varphi \perp \langle \det \varphi \rangle$ - анизотропная форма. Однако

$$\varphi \perp \langle \det \varphi \rangle = \langle a_1, a_2, a_1a_2, b_1, b_2, b_1b_2, 1, 1 \rangle \supset \langle 1,1 \rangle \simeq \mathbb{H},$$

и мы доказали, что $CH^2 U = 0$.

Осталось рассмотреть группу $CH^3 U$. Вычислим $s(\varphi)$: $s(\varphi) = s(\varphi \perp \langle \det \varphi \rangle) = s(\varphi' \perp \mathbb{H}) = s(\varphi') + 1$. Пусть форма φ' анизотропна. Тогда по (2.4.4) $s(\varphi') = 0$, так как $\det \varphi' = 1$, следовательно, $s(\varphi) = 1$. Если φ изотропна, то группа $G^* K(X)$ не имеет кручения, в частности, $CH^3 X \simeq G^3 K(X)$ - группа без кручения. Если же φ анизотропна, то $|TG^* K(X)| = 2$ (2.3.2) и $TG^4 K(X) \simeq \mathbb{Z}/2$ согласно (2.3.13), так как φ содержит (даже не одну) 4-мерную подформу определителя I; так что и в этом случае $TCH^3 X \simeq TG^3 K(X) = 0$. Наконец, если форма φ' изотропна, то, ввиду (I.2.2), доказываемое утверждение сводится к (2.4.7). Лемма доказана.

Пусть Y - произвольное неприводимое многообразие над полем F, $\theta \in Y$ - общая точка. Для каждой точки $y \in Y$ через i_y обозначим естественный морфизм $U_{F(y)} \longrightarrow U \times_F Y$.

(3.4.3) ЛЕММА. Имеет место точная последовательность

$$CH^4 Y \xrightarrow{\pi^*} CH^4(U \times Y) \xrightarrow{i_\theta^*} CH^4(U_{F(\theta)}) \longrightarrow 0,$$

где $\pi : U \times Y \longrightarrow Y$ - проекция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную последовательность К-когомологий (I.I.4), связанную с морфизмом проекции π:

$$E_1^{p,q}(4) = \coprod_{y\in Y^p} H^q(\mathcal{U}_{F(y)}, K_{4-p}) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathcal{U}\times Y, K_4) .$$

По лемме (3.4.2) имеем:

$$E_1^{4-q,q} = \coprod_{y\in Y^{4-q}} CH^q\mathcal{U}_{F(y)} = 0 \quad ,$$

при $q = 1,2,3$, т.е. все группы $E_1^{p,q}$ на диагонали $p+q=4$, кроме, быть может, $E_1^{4,0}$ и $E_1^{0,4}$ равны нулю. Следовательно, получаем точную последовательность

$$\begin{tikzcd}
E_1^{4,0} \arrow[r] \arrow[d, equal] & CH^4(\mathcal{U}\times Y) \arrow[r] & E_1^{0,4} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\coprod_{y\in Y^4} CH^0(\mathcal{U}_{F(y)}) & & CH^4(\mathcal{U}_{F(0)}) &
\end{tikzcd} .$$

Осталось заметить, что образ первого гомоморфизма этой последовательности совпадает с образом гомоморфизма $\pi^*: CH^4Y \to CH^4(\mathcal{U}\times Y)$.

(3.4.4) ЛЕММА. Для любой точки $y\in Y$ существует гомоморфизм $CH^4\mathcal{U}_{F(0)} \to CH^4\mathcal{U}_{F(y)}$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
CH^4\mathcal{U}_{F(0)} \arrow[dr, dashed] & & CH^4(\mathcal{U}\times Y) \arrow[ll, "i_0^*"'] \arrow[dl, "i_y^*"] \\
& CH^4\mathcal{U}_{F(y)} &
\end{tikzcd}$$

иначе говоря, $\operatorname{Ker} i_0^* \subset \operatorname{Ker} i_y^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in CH^4(\mathcal{U}\times Y)$ и $i_0^*(\xi) = 0$. Тогда по лемме (3.4.3) $\xi = \pi^*(\xi')$ для некоторого $\xi'\in CH^4Y$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} U \times Y & U_{F(y)} \arrow[l, "i_y"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ Y \arrow[from=u, "\pi"'] & \mathrm{Spec}\, F(y) \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

получаем $i_y^*(\xi) = (i_y^* \circ \pi^*)(\xi') = (\alpha^* \circ \beta^*)(\xi') = 0$, так как $CH^4(\mathrm{Spec}\, F(y)) = 0$.

(3.4.5) ЛЕММА [4]. Пусть y - неособая точка многообразия Y, ρ - квадратичная форма над полем F. Если форма $\rho_{F(Y)}$ изотропна, то форма $\rho_{F(y)}$ также изотропна.

Положим $a_3 = a_1 a_2$, $b_3 = b_1 b_2$ и пусть Y - гиперповерхность в A^7_F, определенная уравнением $\prod_{i=1}^{3} (a_i x_i^2 + b_i y_i^2) = t^2$ (x_i, y_i, t - координаты в A^7_F). Для произвольного множества A обозначим через F_A свободный композит полей функций $F(Y^{(\alpha)})$ для всех $\alpha \in A$, где $Y^{(\alpha)} = Y$.

(3.4.6) ЛЕММА. Любая анизотропная квадратичная форма над полем F остается анизотропной и над полем F_A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что расширение $F(Y)/F$ не расщепляет анизотропные формы. Это получается из леммы (3.4.5), поскольку многообразие Y содержит неособую рациональную точку $x_i = 1$, $y_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $t = a_3$.

Сформулируем основную теорему

(3.4.7) ТЕОРЕМА. Пусть F - поле, содержащее $\sqrt{-1}$; элементы $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ таковы, что форма $\langle\langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle\rangle$ анизотропна; X - проективная квадрика над полем F, соответствующая форме $\langle 1, a_1, a_2, a_1 a_2, b_1, b_2, b_1 b_2 \rangle$. Тогда для произвольного множества A (возможно, бесконечного) группа $TCH^4 X_{F_A}$ содержит по крайней мере $\mathrm{card}\, A$ различных элементов (определение расширения F_A/F находится перед леммой (3.4.6)).

(3.4.8) КОММЕНТАРИЙ. Взяв бесконечное множество A, получаем 5-мерную квадрику $Q = X_{F_A}$ с бесконечной группой $TCH^4 Q = TCH_1 Q$. Более обшо, для любого $p \geqslant 4$ $(q \geqslant 1)$ можно построить квадрику с бесконечной группой TCH^p (TCH_q), взяв, скажем, форму, задающую Q и добавив к ней $p-4$ гиперболических плоскостей ($q-1$ гиперболических плоскостей). Группы TCH^p при $p \leqslant 3$ и группа TCH_0 являются конечными для любой квадрики.

Доказательству теоремы предпошлем некоторые предварительные построения. Пусть, как и раньше, U - аффинная квадрика

$$1 + a_1 U_1^2 + a_2 U_2^2 + a_3 U_3^2 + b_1 V_1^2 + b_2 V_2^2 + b_3 V_3^2 = 0$$

над полем F (напомним, что $a_3 = a_1 a_2$, $b_3 = b_1 b_2$). Предположим, что даны некоторое расширение E/F и элементы $x_i, y_i \in E^*$ $(i = 1, 2, 3)$, причем $\prod_{i=1}^{3} (a_i x_i^2 + b_i y_i^2) = t^2$ при некотором $t \in E^*$. Через $e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ обозначаем стандартный базис пространства квадратичной формы φ_E, где $\varphi = \langle 1, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \rangle$ - квадратичная форма над F. Определитель 4-мерной подформы, порожденной векторами e, $x_i f_i + y_i g_i$ $(i = 1, 2, 3)$, равен t^2. Следовательно, это подформа определяет на проективном замыкании квадрики U_E цикл "двойная прямая" (2.3.13), ограничение которого на U_E мы обозначаем через C. Кривая C задается системой уравнений

$$\begin{cases} B_1 = B_2 = B_3 = 0 \\ 1 + (a_1 x_1^2 + b_1 y_1^2) A_1^2 = 0 \\ t A_3 = (a_1 x_1^2 + b_1 y_1^2)(a_2 x_2^2 + b_2 y_2^2) A_1 A_2 \end{cases},$$

где $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ – координаты в ортогональном базисе $x_i f_i + y_i g_i$, $b_i y_i f_i - a_i x_i g_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Переходя к координатам U_i, V_i как несложно видеть, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y_i U_i - x_i V_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \\ a_1 x_1^2 + b_1 y_1^2 + (a_1 x_1 U_1 + b_1 y_1 V_1)^2 = 0 \\ t(a_3 x_3 U_3 + b_3 y_3 V_3) = (a_3 x_3^2 + b_3 y_3^2)(a_1 x_1 U_1 + b_1 y_1 V_1)(a_2 x_2 U_2 + b_2 y_2 V_2) \end{cases}$$

Пусть теперь $E = F(Y)$. Выписанная система уравнений определяет замкнутое подмногообразие в $U \times Y$, которое мы обозначим через Z. По определению обратный образ Z при морфизме $U_E \longrightarrow U \times Y$ совпадает с кривой $C \subset U_E$, построенной выше. Для каждой точки $y \in Y$ через i_y обозначаем, как и раньше, естественный морфизм $U_{F(y)} \longrightarrow U \times Y$; пусть Z_y – цикл $i_y^*(Z)$ на $U_{F(y)}$. Как мы уже знаем, $Z_\theta = C$ для обшей точки $\theta \in Y$. Рассмотрим две замкнутые точки u и v на Y, определенные соответственно уравнениями $x_i = 1$, $y_i = 0$, $t = a_3$ и $x_i = 0$, $y_i = 1$, $t = b_3$. Вычислим цикл Z_u на U. Очевидно, он задается уравнениями

$$V_1 = V_2 = V_3 = 0 \ , \quad 1 + a_1 U_1^2 = 0 \ , \quad U_3 = U_1 U_2 \ ,$$

т.е. является ограничением на U цикла "двойная прямая", связанного с подформой $\langle 1, a_1, a_2, a_3\rangle$ в φ. Аналогично, цикл Z_v является ограничением "двойной прямой", связанной с подформой $\langle 1, b_1, b_2, b_3\rangle$ в φ.

Рассмотрим теперь многообразие $U\times Y_1\times Y_2$, где $Y_1 = Y_2 = Y$, и две его проекции π_1 и π_2 на $U\times Y$. Рассмотрим цикл $\Lambda = \pi_1^*(Z) - \pi_2^*(Z)$ на этом многообразии. Пусть $\eta\in Y_1\times Y_2$ – обшая точка. Вычислим цикл Λ_η на $U_{F(\eta)}$. Пусть $\theta_j\in Y_j$ – обшая точка и C_j – цикл на $U_{F(\theta_j)}$, описанный выше (обозначавшийся ранее через C). Ясно, что $F(\eta) = F(\theta_1)\cdot F(\theta_2)$. Так как композиция $U_{F(\eta)}\to U\times Y_1\times Y_2\xrightarrow{\pi_j} U\times Y_j$ совпадает с $U_{F(\eta)}\to U_{F(\theta_j)}\to U\times Y_j$, то

$$\pi_1^*(Z)_\eta = Z_{\theta_1}\otimes_{F(\theta_1)} F(\eta) = C_1\otimes_{F(\theta_1)} F(\eta)$$

и аналогично $\pi_2^*(Z) = C_2\otimes_{F(\theta_2)} F(\eta)$, следовательно,

$$\Lambda_\eta = \pi_1^*(Z)_\eta - \pi_2^*(Z)_\eta = C_1\otimes F(\eta) - C_2\otimes F(\eta).$$

Пусть теперь $w = (u, v)\in Y_1\times Y_2$; вычислим Λ_w. Так как композиция $U\xrightarrow{i_w} U\times Y_1\times Y_2\to U\times Y_1$ совпадает с i_u, то $\pi_1^*(Z)_w = i_u^*(Z) = Z_u$. Аналогично, $\pi_2^*(Z)_w = Z_v$. Поэтому $\Lambda_w = \pi_1^*(Z)_w - \pi_2^*(Z)_w = Z_u - Z_v$.

(3.4.9) ЛЕММА. Циклы $C_1\otimes F(\eta)$ и $C_2\otimes F(\eta)$ на $U_{F(\eta)}$ не эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X и X' – проективные квадрики над полем F, соответствуюшие φ и φ'. Имеем точную последовательность $CH^3X'\to CH^4X\to CH^4U\to 0$.

По условию форма $\langle\langle a_1, a_2, b_1, b_2\rangle\rangle$ анизотропна, поэтому "двойные прямые" на X, соответствующие подформам $\langle 1, a_1, a_2, a_3\rangle$ и $\langle 1, b_1, b_2, b_3\rangle$ формы φ, не эквивалентны. Форма φ' анизотропна и имеет определитель, равный I, следовательно, по теореме (2.4.5) $CH^3X' \simeq \mathbb{Z}\cdot h^3$, откуда получаем, что образ CH^3X' в CH^4X равен $\mathbb{Z}\cdot h^4$ и не содержит кручения. Поэтому ограничения этих "двойных прямых" на U - циклы Z_u и Z_v - также не эквивалентны, т.е. $[\Lambda_w] \neq 0 \in CH^4U$. Отсюда, согласно лемме (3.4.4), $[\Lambda_\eta] \neq 0 \in CH^4U_{F(\eta)}$, т.е. циклы $C_1 \otimes F(\eta)$ и $C_2 \otimes F(\eta)$ не эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ (3.4.7). Пусть $e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ - стандартный базис пространства квадратичной формы $\langle 1, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\rangle$ над полем F_A. Поле F_A содержит для каждого $\alpha \in A$ поле функций $F(Y^{(\alpha)})$ и вместе с ним элементы $x_i^{(\alpha)}, y_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, 3)$, $t^{(\alpha)}$, причем $\prod_{i=1}^{3}(a_i x_i^{(\alpha)^2} + b_i y_i^{(\alpha)^2}) = t^{(\alpha)^2}$.

Определитель 4-мерной подформы $\psi^{(\alpha)}$, порожденной векторами e, $e_i^{(\alpha)} = x_i^{(\alpha)} f_i + y_i^{(\alpha)} g_i$ $(i = 1, 2, 3)$, равен $t^{(\alpha)^2}$. Следовательно, эта подформа определяет некоторый элемент кручения $\xi^{(\alpha)} \in TCH^4X_{F_A}$ (2.3.I3). Мы докажем, что все элементы $\xi^{(\alpha)}$ $(\alpha \in A)$ различны.

Фиксируем $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ и докажем, что $\xi^{(\alpha)} \neq \xi^{(\beta)}$.

Идея доказательства состоит в проведении такой "специализации" переменных x, y, чтобы векторы e, $e_1^{(\alpha)}, e_2^{(\alpha)}, e_3^{(\alpha)}$, $e_1^{(\beta)}, e_2^{(\beta)}, e_3^{(\beta)}$ стали попарно ортогональными. Тогда циклы $\xi^{(\alpha)}$ и $\xi^{(\beta)}$ можно будет сравнить с помощью теоремы (3.4.I). Подберем такую "специализацию". Нужно добиться, чтобы $(e_i^{(\alpha)}, e_i^{(\beta)}) = 0$ при $i = 1, 2, 3$ (остальные пары ортогональны с самого начала). Поскольку

$$(e_i^{(\alpha)}, e_i^{(\beta)}) = a_i x_i^{(\alpha)} x_i^{(\beta)} + b_i y_i^{(\alpha)} y_i^{(\beta)} ,$$

подходящей "специализацией" будет: $x_i^{(\beta)} = y_i^{(\alpha)} = 0$, $x_i^{(\alpha)} = y_i^{(\beta)} = 1$.

При этом получим $\psi^{(\alpha)} \simeq \langle\langle a_1, a_2 \rangle\rangle$, $\psi^{(\beta)} \simeq \langle\langle b_1, b_2 \rangle\rangle$, и условие $\xi^{(\alpha)} \neq \xi^{(\beta)}$ станет эквивалентно условию анизотропности формы $\langle\langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle\rangle$ в силу теоремы (3.4.I).

Оформим строго изложенную идею доказательства.

Заменив F на $F_{A \setminus \{\alpha, \beta\}}$, сведем доказательство к случаю $A = \{\alpha, \beta\}$ (форма $\langle\langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle\rangle$ остается анизотропной в силу леммы (3.4.6)). В обозначениях леммы (3.4.9) пусть $Y_1 = Y^{(\alpha)}$, $Y_2 = Y^{(\beta)}$. Тогда $F_A = F(\eta)$, где $\eta \in Y_1 \times Y_2$ – общая точка, и

$$(\xi^{(\alpha)} - \xi^{(\beta)})\Big|_{U_{F(\eta)}} = [C_1 \otimes F(\eta)] - [C_2 \otimes F(\eta)] \neq 0 \in CH^4 U_{F(\eta)} .$$

Следовательно, $\xi^{(\alpha)} \neq \xi^{(\beta)}$. Теорема доказана.

ГЛАВА IУ

ГАММА-ФИЛЬТРАЦИЯ

§ I. Предварительные сведения

В этом параграфе буква X обозначает произвольное неособое алгебраическое многообразие над полем F. Здесь будут приведены основные определения и утверждения, связанные с гамма-фильтрацией на кольце Гротендика $K = K(X)$, которые можно найти в [5].

ЛЯМБДА-ОПЕРАЦИИ. Пусть $1 + t \cdot K[[t]]$ обозначает мультипликативную группу рядов над кольцом K от переменной t, у которых свободный член равен I. Определим гомоморфизм λ_t из аддитивной группы кольца K в группу $1 + t \cdot K[[t]]$ формулой

$$\lambda_t([\mathcal{F}]) = \sum_{p=0}^{\infty} [\Lambda^p \mathcal{F}] \cdot t^p ,$$

где $\mathcal{F}$ - локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль, $\Lambda^p \mathcal{F}$ - его p-тая внешняя степень. Формула действительно задает гомоморфизм, поскольку

$$[\Lambda^n (\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)] = \sum_{p=0}^{n} [\Lambda^p \mathcal{F}_1 \otimes \Lambda^{n-p} \mathcal{F}_2] .$$

Лямбда-операции λ^p на K, где $p = 0, 1, 2, \ldots$, - это коэффициенты при степенях t в гомоморфизме λ_t, т.е. отображения (вообще говоря, не гомоморфизмы) из K в K, для которых

$$\lambda_t(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \lambda^\rho(x)\cdot t^\rho \qquad \text{при любом} \quad x \in K .$$

В частности , $\lambda^0(x) = 1$, $\lambda^1(x) = x$.

ГАММА-ОПЕРАЦИИ. Определим еще один гомоморфизм $\gamma_t : K \longrightarrow 1 + t\cdot K[[t]]$, положив $\gamma_t = \lambda_{\frac{t}{1-t}}$, т.е.

$$\gamma_t(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \lambda^\rho(x)(t + t^2 + t^3 + \dots)^\rho .$$

Гамма-операции $\gamma^\rho : K \longrightarrow K$ определяются формулой

$$\gamma_t(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \gamma^\rho(x)\cdot t^\rho , \quad x \in K .$$

(4.I.I) ЛЕММА. Если $\xi \in K$ - класс обратимого пучка, то $\gamma_t(\xi - 1) = 1 + (\xi - 1)t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку внешняя степень Λ^ρ обратимого пучка тривиальна при $\rho > 1$, получаем формулу $\lambda_t(\xi) = 1 + \xi t$. Отсюда

$$\gamma_t(\xi) = \lambda_{\frac{t}{1-t}}(\xi) = 1 + \xi\frac{t}{1-t} .$$

Следовательно,

$$\gamma_t(\xi - 1) = \frac{\gamma_t(\xi)}{\gamma_t(1)} = \frac{1 + \xi\frac{t}{1-t}}{1 + \frac{t}{1-t}} = 1 + (\xi - 1)t .$$

(4.I.2) ЛЕММА [5] . Для топологической фильтрации на K имеет место включение $\gamma^\rho(K^{(1)}) \subset K^{(\rho)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАММА-ФИЛЬТРАЦИИ. Гамма-фильтрация $K = \Gamma^{(0)} \supset$

$\supset \Gamma^{(1)} \supset \ldots$ на кольце Гротендика K – это наименьшая согласованная с умножением фильтрация, для которой $\Gamma^{(1)} = K^{(1)}$ и $\gamma^p(\Gamma^{(1)}) \subset \Gamma^{(p)}$. Таким образом, $\Gamma^{(p)}$ – это подгруппа в K, порожденная всевозможными произведениями вида

$$\gamma^{p_1}x_1 \cdot \gamma^{p_2}x_2 \cdot \ldots \cdot \gamma^{p_n}x_n \quad , \text{ где } \quad x_i \in K^{(1)}, \ \sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant p .$$

(4.I.3) СЛЕДСТВИЕ. Гамма-фильтрация минорирует топологическую: $\Gamma^{(p)} \subset K^{(p)}$ при всех p; в частности, $\Gamma^{(d+1)} = 0$, где $d = \dim X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение – прямое следствие определения гамма-фильтрации и леммы (4.I.2).

Кольцо Гротендика K, снабженное гамма-фильтрацией, мы будем для сокращения записи обозначать через Γ; ассоциированное градуированное кольцо – через $G^*\Gamma$.

О близости гамма-фильтрации к топологической свидетельствует

(4.I.4) ПРЕДЛОЖЕНИЕ [5]. I) $\Gamma^{(2)} = K^{(2)}$, т.е. $G^1\Gamma = G^1K \simeq CH^1X$;

2) естественный гомоморфизм градуированных колец $G^*\Gamma \longrightarrow G^*K$ становится изоморфизмом после домножения на $\mathbb{Q}$:

$$G^*\Gamma \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\ \sim\ } G^*K \otimes \mathbb{Q} .$$

§ 2. Вычисление гамма-операций

Снова X – это проективная квадрика, соответствующая невырожденной квадратичной форме φ. Этот параграф посвящен вычислению гамма-операций на кольце Гротендика квадрики X.

Используемые здесь обозначения, связанные с кольцом Гротендика, введены в гл.П. Основ-ой результатов этой главы является

(4.2.I) ЛЕММА. Если $q > d/2$, то в группе Гротендика Γ при любом положительном p имеет место равенство:

$$\gamma^p(h^q) = -\frac{1}{p} \sum_n (-1)^n S^n_{p,q} \cdot h^n ,$$

где

$$S^n_{p,q} = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} C^i_p C^n_{ij} C^j_q$$

(в правой части стоят биномиальные коэффициенты).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать взаимнообратные изоморфизмы групп

$$1 + t \cdot (\Gamma \otimes Q)[[t]] \underset{exp}{\overset{ln}{\rightleftarrows}} t \cdot (\Gamma \otimes Q)[[t]] ,$$

где слева стоит мультипликативная группа рядов со свободным членом I, а справа - аддитивная группа рядов без свободного члена. Эти изоморфизмы определяются стандартными формулами:

$$ln(1 + tf) = -\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{t^i f^i}{i} ; \quad exp(tf) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i f^i}{i!} ,$$

где $f = f(t) \in (\Gamma \otimes Q)[[t]]$ - произвольный ряд.
Пусть $\xi = [\theta_X(-1)]$. Тогда

$$\gamma_t(h^q) = \gamma_t((1-\xi)^q) = \gamma_t\left[\sum_j (-1)^j C^j_q (\xi^j - 1)\right] =$$

$$= \prod_j (\gamma_t(\xi^j - 1))^{(-1)^j C^j_q} = \prod_j (1 + (\xi^j - 1)t)^{(-1)^j C^j_q}$$

(в последнем равенстве использована лемма (4.I.I)).

Отсюда

$$\ln \gamma_t(h^q) = \sum_j (-1)^j C_q^j \ln(1 + (\xi^j - 1)t) =$$

$$= -\sum_{p \geq 1} \frac{t^p}{p} \cdot \sum (-1)^j C_q^j (1-\xi^j)^p .$$

Заметим, что коэффициент при $-\frac{t^p}{p}$ в полученном ряде равен

$$\sum_j (-1)^j C_q^j (1-\xi^j)^p = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} C_p^i C_q^j \xi^{ij} = \sum_i (-1)^i C_p^i (1-\xi^i)^q$$

и делится на h^q. Таким образом, $\ln \gamma_t(h^q) = h^q f(t)$ для некоторого ряда $f(t) \in K(\Gamma \otimes Q)[[t]]$. Отсюда

$$\gamma_t(h^q) = \exp(h^q \cdot f(t)) = 1 + h^q f(t) = 1 + \ln \gamma_t(h^q) .$$

(в среднем равенстве используется, что $(h^q)^2 = 0$, так как по условию $2q > d$). Итак,

$$\gamma^p(h^q) = -\frac{1}{p} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} C_p^i C_q^j \xi^{ij} .$$

Заменив в правой части ξ на $1-h$, получим доказываемую формулу.

(4.2.2) СЛЕДСТВИЕ. Имеется свойство "линейности" гамма-операций на больших степенях h :

$$\gamma^p\Big(\sum_{q > d/2} a_q h^q\Big) = \sum_q a_q \gamma^p(h^q) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было замечено при доказательстве леммы (4.2.I), $\gamma_t(h^q)$ имеет вид $1 + h^q f_q(t)$.

Поэтому

$$\gamma_t\Big(\sum_{q>d/2} a_q h^q\Big) = \prod_q \big(\gamma_t(h^q)\big)^{a_q} =$$

$$= \prod_q \big(1 + h^q f_q(t)\big)^{a_q} = 1 + \sum_q a_q h^q f_q(t) ,$$

так как $(h^q)^2 = 0$. Следствие доказано.

Элементы $\ell_q \in K$, введенные в (2.2.8), мы будем использовать здесь с верхними индексами, полагая $\ell^q = \ell_{d-q}$.

(4.2.3) СЛЕДСТВИЕ. Значение гамма-операции γ^p на элементе $\ell^q \in \Gamma$ является линейной комбинацией $h^q, h^{q+1}, \dots, h^d$ (с рациональными коэффициентами), причем коэффициент при h^n равен с точностью до знака числу

$$T^n_{p,q} = \frac{1}{p} \sum_{i=q}^{n} \frac{1}{2^{i-q+1}} S^n_{p,i} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается из (4.2.I),(4.2.2) и определения элементов ℓ^q (2.2.8).

§ 3. Основные теоремы о факторгруппах

В первой части этого параграфа займемся вычислением гамма-фильтрации, предполагая, что $\varphi \notin I^2(F)$.

(4.3.I) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\varphi \notin I^2(F)$. Кольцо с фильтрацией $\Gamma^{\cdot}$ зависит только от двух инвариантов квадратичной формы φ : ее размерности и числа $s(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два названных инварианта однозначно определяют Γ как подкольцо в $H \otimes \mathbb{Q}$, где H - подкольцо в Γ , порожденное h . Поскольку

$$H \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[h]/(h^{d+1}) \quad \text{и} \quad \gamma_t(-h) = 1 - ht \qquad (4.1.1),$$

гамма-операции на кольце Γ также определены однозначно.

(4.3.2) СЛЕДСТВИЕ. Если $(\dim\varphi, s(\varphi)) \neq (3,1),(4,1),(5,1)$, то $\ell^q \notin \Gamma^{(q)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если пара чисел $(\dim\varphi, s(\varphi))$ отлична от указанных, то можно найти анизотропную квадратичную форму φ' (над некоторым подходящим полем F'), обладающую такими инвариантами. Тогда $\ell^q \notin K^{(q)}$ (2.2.II). Так как $\Gamma^{(q)} \subset K^{(q)}$ (4.1.3), отсюда следует, что $\ell^q \notin \Gamma^{(q)}$.

Теперь, когда получено утверждение (4.3.2), следующая теорема доказывается абсолютно так же, как и аналогичное утверждение о топологической фильтрации из § 3 гл.II (отличие состоит в том, что в условии этой теоремы не требуется анизотропности формы φ). Мы убираем из рассмотрения исключительные случаи (4.3.2).

(4.3.3) ТЕОРЕМА. Пусть $\varphi \notin I^2(F)$. Обозначим через $q_1, q_2, \ldots, q_s$ коразмерности элементов $\ell^{d-s+1}, \ell^{d-s+2}, \ldots, \ell^d \in \Gamma$. Тогда

$$G^q\Gamma = \begin{cases} \mathbb{Z}\cdot h^q \oplus (\mathbb{Z}/2)\cdot \ell^{d-s+i}, & \text{если } q = q_i,\ i = 1,2,\ldots,s; \\ \mathbb{Z}\cdot h^q & \text{для остальных } q. \end{cases}$$

Тем самым, единственная проблема при вычислении $G^*\Gamma$ - определить коразмерность элементов ℓ^q . Ниже приведены результаты, касающиеся этой проблемы.

Положим $\quad T_q^n = \max\{p \mid T_{p,q}^n \notin \mathbb{Z}\}$, где $T^n_{p,q}$ — числа из (4.2.3). Для любого неотрицательного n определим возрастающую последовательность натуральных чисел $q_0(n)$, $q_1(n), \dots, q_n(n)$ следующим образом:

$q_0(n) = T^n_n$;

$q_1(n)$ — это максимальное из чисел $q_0(n)+1$, T^{n+1}_n ;

. . . ;

$q_i(n)$ — это максимальное из чисел

$$q_0(n)+i, \ q_1(n)+(i-1), \ \dots, \ q_{i-1}(n)+1, \ T^{n+i}_n \ ;$$

. . . .

(4.3.4) ТЕОРЕМА. Пусть $n = d-s+1$. Тогда коразмерность элемента $\ell^{n+i} \in \Gamma$ равна $q_i(n)$. Тем самым, компоненты ассоциированного градуированного кольца $G^*\Gamma$, содержашие кручение, имеют коразмерности $q_0(n), q_1(n), \dots, q_{s-1}(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что гамма-операции определены на подкольце $H \subset \Gamma$; гамма-фильтрация на H — это стандартная фильтрация по степеням h ; $\Gamma = H + \mathbb{Z}\cdot \ell^n$. Поэтому подгруппа $\Gamma^{(q)} \subset \Gamma$ порождена всевозможными произведениями $\gamma^{p_1}(\ell^n)\cdot h^{p_2}$, в которых $p_1+p_2 \geqslant q$. Для завершения доказательства теоремы осталось воспользоваться формулой (4.2.3).

Таким образом, вопрос о $G^*\Gamma$ свелся к вычислению элементов последовательности $q_0(n), \dots, q_{n-1}(n)$, т.е. к некоторой задаче о делимости целых чисел. В этом направлении имеются следующие результаты.

(4.3.5) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $n \geqslant 2$, то $q_0(n) = 2$, $q_1(n) = 3$, $q_2(n) = 4$ и $q_3(n) = 6$ при $n > 3$.

(4.3.6) СЛЕДСТВИЕ. Компоненты $G^*\Gamma$, содержащие нетривиальное кручение имеют такие номера:

I) 2, если $s(\varphi) = 1$;

2) 2,3, если $s(\varphi) = 2$;

3) 2,3,4, если $s(\varphi) = 3$;

4) 2,3,4,6, если $s(\varphi) = 4$;

5) 2,3,4,6 и какие-то большие, чем 6, если $s(\varphi) > 4$.

Доказательству предложения предпошлем лемму

(4.3.7) ЛЕММА. Пусть $s(n,k)$ – числа Стирлинга первого рода, $S(n,k)$ – числа Стирлинга второго рода [8]. Тогда

$$S^n_{p,q} = (-1)^{p+q} \frac{p!\,q!}{n!} \sum_k S(k,p)\cdot S(k,q)\cdot s(n,k)$$

(в правой части равенства суммирование ведется фактически по k от $\max(p,q)$ до n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для чисел Стирлинга второго рода имеется формула

$$(-1)^p p!\, S(k,p) = \sum_i (-1)^i C^i_p\, i^k \qquad [8] .$$

Поэтому правая часть доказываемого равенства равна

$$\sum_{i,j} (-1)^{i+j} C^i_p C^j_q \sum_k \frac{s(n,k)(ij)^k}{n!} .$$

Осталось воспользоваться формулой $\sum_k \frac{s(n,k)(ij)^k}{n!} = C^n_{ij}$ [8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Здесь будет приведено лишь доказательство утверждения о $q_0(n)$, поскольку доказательства утверждений об остальных трех числах отличаются от этого только громоздкостью вычислений.

Число $q_0(n)$ определяется с помощью чисел $T^n_{p,n}$. Мы знаем, что $T^n_{p,n} = \frac{1}{2p} S^n_{p,n} = \pm \frac{(p-1)!}{2} S(n,p)$ (4.2.3),(4.3.7). Если $p \geqslant 3$, то $\frac{(p-1)!}{2} S(n,p) \in \mathbb{Z}$, так как $S(n,p)$ - всегда целое число. Подставив $p=2$, получаем нецелое $\frac{1}{2} S(n,2)$, так как $S(n,2)$ при $n \geqslant 2$ нечетно [8]. Таким образом, $q_0(n) = \max\{p \mid T^n_{p,n} \notin \mathbb{Z}\} = 2$. Доказательство предложения прекращается.

Следующие члены последовательности $q_i(n)$ были найдены до $i = 19$ с помощью компьютера. Оказалось, что число $q_i(n)$ при $4 \leqslant i \leqslant 19$ не зависит от n и равно (если определено)

$i+2$ для всех i от 4 до 9;

$i+3$ для всех i от 10 до 19.

Продолжить вычисления дальше не позволила мощность компьютера. Отметим, что эти результаты компьютерного счета завершают решение задачи о вычислении $G^*\Gamma$ для квадрик размерности не выше 40.

В заключение параграфа несколько слов о случае $\varphi \in I^2(F)$. Здесь, как и при работе с топологической фильтрацией, можно построить группы кручения первого и второго рода $\underline{\mathrm{I}}^*$ и $\underline{\mathrm{II}}^*$ и доказать, что $TG^*\Gamma = \underline{\mathrm{I}}^* \oplus \underline{\mathrm{II}}^*$. При этом здесь возникает одно отличие: порядок группы $\underline{\mathrm{II}}^*$ равен теперь $(d/2-1)!$ (в частности, $\underline{\mathrm{II}}^*$ не является 2-группой). Мы не приводим полных формулировок и доказательств утверждений о $TG^*\Gamma$ для случая $\varphi \in I^2(F)$, поскольку эти формулировки не очень важны для нашей основной темы, а доказательства практически не содержат новых идей.

§ 4. Применение к топологической фильтрации

В этом параграфе обсудим возможности применения результатов из § 2 к получению информации о топологической фильтрации. Как показано в гл.II, единственная проблема при вычислении G^*K (если $\varphi \notin I^2(F)$) - это определение коразмерностей элементов $\ell^q \in K$ в топологической фильтрации. Эта проблема осталась открытой, и было сказано, что $\mathrm{codim}_{top}\,\ell^q$ зависит от весьма тонких свойств квадратичной формы φ и уж во всяком случае не определяется инвариантами $\dim\varphi$, $s(\varphi)$. Было бы интересно получить хотя бы оценку снизу для возможных значений $\mathrm{codim}_{top}\,\ell^q$ при данных $\dim\varphi$, $s(\varphi)$. Естественно использовать для этого гамма-фильтрацию: поскольку гамма-фильтрация однозначно определяется инвариантами $\dim\varphi$ и $s(\varphi)$ (4.3.I), то $\mathrm{codim}_\gamma\,\ell^q \leq$ $\leq \mathrm{codim}_{top}\,\ell^q$ (4.I.3) - искомая оценка. Сформулируем этот результат в виде предложения:

(4.4.I) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $n = d-s+1, q = n, n+1, \ldots, d$, то $\mathrm{codim}_{top}\,\ell^q \geqslant q_i(n)$.

К сожалению, ожидания, что гамма-фильтрация для квадрик очень близка к топологической, основанные, в частности, на (4.I.4), не сбылись. Как показывают результаты компьютерного счета, приведенные в предыдущем параграфе, гамма-фильтрация оказывается довольно "маленькой", поэтому оценка (4.4.I), надо полагать, довольно груба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра: модули, кольца, формы. М.,Наука,1966. 555с.
2. Карпенко Н.А. Алгебро-геометрические инварианты квадратичных форм//Алгебра и анализ. 1990. Т.2,вып.1.С.141-162.
3. Карпенко Н.А. Топологическая фильтрация на группе Гротендика//Тезисы докладов по теории групп Международной конференции по алгебре. Новосибирск,1989.
4. Карпенко Н.А.,Меркурьев А.С. Группы Чжоу проективных квадрик//Алгебра и анализ. 1990.Т.2,вып.3. С. 218-235.
5. Манин Ю.И. Лекции по алгебраической геометрии, часть II - К-функтор в алгебраической геометрии. М.,1971.
6. Меркурьев А.С. О символе норменного вычета степени 2//ДАН СССР. 1981. Т.261, №3. С.542-547.
7. Меркурьев А.С.,Суслин А.А. К-когомологии многообразий Севери-Брауэра и гомоморфизм норменного вычета//Изв.АН СССР.Сер. мат.1982. Т.46, №5. С.1011-1046.
8. Рыбников К.А. Комбинаторный анализ. М.,Наука,1982.368с.
9. Серр Ж.-П. Локальная алгебра и теория кратностей//Математика. 1963. 7:5. С.3-93.
10. Фултон У. Теория пересечений. М.,Мир,1989.583с.
11. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.,Мир,1981.600с.
12. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии.Т.1.М.,Наука, 1988.352с.
13. Arason J.K.,Pfister A. Beweis des Krullshen Durchschnittsatzes für den Wittring//Inv.Math. 1971, V.12. P.173-176.
14. Grayson D.R. Products in K-theory and intersecting algebraic cycles//Inv.Math. 1978,V.47. P.71-83.

15. Grothendieck A. La theorie des classes de Chern//Bull.Soc. Math.France. 1958. V.86. P.137-154.

16. Hodge W.V.D.,Pedoe D. Methods of Algebraic Geometry II. Cambridge. 1952.

17. Jacob B.,Rost M. Degree-Four Cohomological Invariant for quadratic forms//Inv.Math. 1989.

18. Lam T.Y. The algebraic theory of quadratic forms,Reading. 1973. 344p.

19. Merkurjev A.S.,Suslin A.A. On the norm residue homomorphism of degree three. LOMI preprints. E-9-86. 1986.

20. Quillen D. Higher algebraic K-theory. I// Lect.Notes.Math. 1973. Vol.341. P.77-139.

21. Severi F. La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica//Comm. Math.Helv. 1932. V.4. P.268-326.

22. Sherman C. K-cohomology of regular schemes//Comm.Algebra. 1979. V.7, N 10. P.999-1027.

23. Sherman C. Some theorems on the K-theory of coherent sheaves// Comm.Algebra. 1979. V.7, N 14. P.1489-1508.

24. Swan R.G. K-theory of quadric hypersurfaces//Ann.Math.1985. Vol.122, N 1. P.113-154.

25. Swan R.G. Zero cycles on quadric hypersurfaces//Proc.of the American Math.Soc. 1989. V.107, N 1. P.43-46.

26. Swan R.G. Vector bundles, projective modules and the K-theory of spheres//Proc.of the John Moore Conference. Algebraic Topology and Algebraic K-Theory (W.Browder, ed.) Ann.Math. Stud. 1987. V.113. P.432-522.